

Affinché la somma S sia convergente quando tutti i δ diventano infinitamente piccoli, oltre al fatto che la funzione $f(x)$ sia limitata, occorre anche che l'ampiezza complessiva degli intervalli, in cui le oscillazioni sono $> \sigma$ qualunque sia σ , possa essere resa arbitrariamente piccola mediante un'opportuna scelta di d .

Per questo teorema vale anche il viceversa:

Se la funzione $f(x)$ è sempre limitata e se al decrescere infinitamente di tutte le grandezze δ l'ampiezza complessiva s degli intervalli, in cui le oscillazioni della funzione sono maggiori di una grandezza data σ , diventa sempre alla fine infinitamente piccola, allora la somma S è convergente, quando tutti i δ diventano infinitamente piccoli.

BERNHARD RIEMANN, *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe*, §§ 4 e 5.

38. LE SEZIONI DI DEDEKIND

Nel 1872 Dedekind dava alle stampe un opuscolo in cui presentava una definizione rigorosa (e dunque a suo dire, «aritmetica») della nozione intuitiva di continuità della retta. In questo scritto, originato dalle sue lezioni nel 1858 al Politecnico di Zurigo e diventato un classico della letteratura matematica, Dedekind studiava le proprietà topologiche e di ordinamento dell'insieme dei numeri razionali e di quello dei punti della retta, introduceva il concetto di sezione del campo dei numeri razionali e, per questa via, definiva la nozione di numero irrazionale e quella di numero reale, che sta alla base dei più importanti concetti dell'analisi.

Nel considerare una grandezza variabile tendente ad un valore-limite fisso (e ciò nella dimostrazione del teorema che ogni grandezza sempre ma non illimitatamente crescente tende certamente ad un limite), ricorrevi all'intuizione geometrica. Ritengo anche adesso che dal punto di vista didattico l'uso di considerazioni geometriche sia molto utile nel primo insegnamento del calcolo differenziale e che anzi esso sia indispensabile, se si vuol evitare una eccessiva perdita di tempo. Ma nessuno, credo, vorrà sostenere che una tale introduzione nel calcolo differenziale possa vantarsi di essere scientifica. Tanto era il mio malcontento che presi la ferma decisione di riflettere finché non trovassi una base puramente aritmetica e completamente rigorosa dei principii del calcolo differenziale. Spesso si dice che il calcolo differenziale si occupa di grandezze continue, eppure non si dà mai una definizione di questa continuità. Le trattazioni più rigorose che si hanno del calcolo differenziale non basano le loro dimostrazioni sulla continuità, ma fanno invece appello più o meno coscientemente a rappresentazioni geometriche o si servono di teoremi che a loro volta non furono mai rigo-

rosamente dimostrati con mezzi puramente aritmetici. A questi teoremi appartiene, per esempio, il teorema sopra menzionato ed io, dopo un esame più accurato, mi sono convinto che questo teorema o ogni altro teorema ad esso equivalente può essere considerato in un certo senso come base sufficiente del calcolo differenziale. E allora si trattava soltanto di scoprire negli elementi dell'aritmetica la vera origine di questo teorema, acquistando con ciò nello stesso tempo una definizione effettiva della continuità. [...] Per il nostro scopo immediato ha [...] importanza una [...] proprietà del sistema R dei numeri razionali, la quale si può esprimere dicendo che il sistema R costituisce un campo ben ordinato ad una dimensione e che si estende all'infinito in due direzioni opposte. [...]

Per esprimere che i simboli a , b indicano lo stesso numero razionale, si scrive $a = b$, come pure $b = a$. L'essere due numeri razionali a e b distinti tra loro si manifesta nel fatto che la differenza $a - b$ ha un valore positivo o negativo. Nel primo caso a si dice maggiore di b e b minore di a , in simboli $a > b$, $b < a$. Nel secondo caso, avendo $b - a$ un valore positivo, segue $b > a$, $a < b$. Riguardo a questa doppia possibilità che si presenta per due numeri distinti, valgono le leggi seguenti:

1° Se si ha $a > b$ e $b > c$, allora si ha $a > c$. Quando a e c siano due numeri distinti (diseguali) e b sia maggiore dell'uno e minore dell'altro, allora, senza temere allusioni a rappresentazioni geometriche, diremo brevemente che b sta tra i due numeri a e c .

2° Se a , c sono due numeri distinti, allora esistono infiniti numeri b tra a e c .

3° Se a è un numero dato, allora tutti i numeri del sistema R si ripartiscono in due classi A_1 , e A_2 , contenenti ognuna infiniti elementi; la prima classe A_1 comprende tutti i numeri a , che sono $< a$, la seconda classe A_2 comprende tutti i numeri a , che sono $> a$. Il numero a stesso può essere incluso a piacere o nella prima o nella seconda classe, e sarà allora corrispondentemente o il numero massimo della prima classe, o il numero minimo della seconda classe. In ogni caso la ripartizione del sistema R nelle due classi A_1 , A_2 è di tale natura che ogni numero della prima classe A_1 è minore di ogni numero della seconda classe A_2 .

§ 2

CONFRONTO TRA I NUMERI RAZIONALI E I PUNTI DI UNA RETTA

Le proprietà dei numeri razionali sopra accennate ricordano le mutue relazioni di posizione che intercedono tra i punti di una retta L . Se chiameremo «destro» e «sinistro» i due versi opposti sulla retta, allora, essendo p , q due punti distinti, o p sta a destra di q , e contemporaneamente q sta a sinistra di p , o inversamente q sta a destra di p , e in pari tempo p sta a sinistra di q . Un terzo caso è impossibile, se p e q sono effettivamente punti distinti. Riguardo a queste relazioni di posizione valgono le leggi seguenti:

1° Se p sta a destra di q e q sta ancora a destra di r , allora anche p sta a de-

stra di r , e si dice che q sta fra i punti p ed r .

2° Se p , r sono punti distinti, allora vi sono sempre infiniti punti q tra p ed r .

3° Se p è un punto dato di L , allora tutti i punti di L si ripartiscono in due classi P_1 , P_2 , contenenti ognuna infiniti elementi; la prima classe P_1 comprende tutti i punti p_1 situati a sinistra di p , e la seconda classe P_2 comprende tutti i punti p_2 situati a destra di p . Il punto p stesso può essere incluso a piacere o nella prima o nella seconda classe. In ogni modo la ripartizione della retta L nelle due classi è di tale natura che ogni punto della prima classe P_1 sta a sinistra di ogni punto della seconda classe P_2 .

Questa analogia tra i numeri razionali e i punti di una retta diventa notoriamente un legame effettivo, qualora si fissi sulla retta un punto come origine, cioè il punto zero 0 , e si scelga una determinata unità di lunghezza per misurare le distanze. Per ogni numero razionale a si può allora costruire una lunghezza corrispondente, e si porta questa lunghezza sulla retta, a destra o a sinistra del punto 0 , secondoché a è positivo o negativo, allora si arriva a un punto estremo determinato p , il quale può essere considerato come punto corrispondente al numero a . Al numero razionale zero corrisponde il punto 0 . In questa maniera ad ogni numero razionale a , cioè ad ogni elemento di R , viene a corrispondere uno e un solo punto p , cioè un elemento di L . Se a due numeri a , b corrispondono rispettivamente due punti p , q , e se si ha, $a > b$, allora p sta a destra di q . [...]

§ 3

LA CONTINUITÀ DELLA RETTA

Ora è della massima importanza il fatto che esistono sulla retta L infiniti punti i quali non corrispondono a nessun numero razionale. Se un punto p corrisponde a un numero razionale a , allora la lunghezza op è notoriamente commensurabile con la unità di lunghezza prescelta nella costruzione, v. a d. esiste una terza lunghezza, la cosiddetta misura comune, di cui quelle due siano multiple intere. Ma già i Greci antichi sapevano e hanno dimostrato che esistono lunghezze incommensurabili con una data lunghezza unitaria, p. es., la diagonale di un quadrato il cui lato si assuma per unità di lunghezza. Se si porta una tale lunghezza sulla retta a partire dal punto o , allora il punto estremo che si ottiene non corrisponde a nessun numero razionale. Siccome inoltre si può dimostrare facilmente che esistono infinite lunghezze incommensurabili con la data lunghezza unitaria, possiamo affermare che la retta L è infinitamente più ricca di punti che non il campo razionale R di numeri. Quindi i numeri razionali non bastano per poter seguire aritmeticamente tutti i fenomeni sulla retta, e appare perciò indispensabile raffinare sostanzialmente lo strumento R , creando numeri nuovi, di guisa che il campo dei numeri acquisiti sia altrettanto completo o, diciamo subito, altrettanto continuo, quanto lo è la retta.

Le considerazioni precedenti sono tanto note e familiari a tutti, che il ripeterle può sembrare superfluo. Ciò nondimeno ne ho ritenuto necessaria la

ricapitolazione per preparare opportunamente il terreno alla questione principale. La via per la quale finora si solevano introdurre i numeri irrazionali aveva come punto di partenza il concetto di grandezza estensiva, il quale però non è mai stato esso stesso ben definito, e seguendo questa via si arrivava a definire il numero come risultato della misura di una tale grandezza per mezzo di un'altra grandezza dello stesso genere ²⁾.

In sua vece io chiedo che l'aritmetica si svolga da se medesima. Si può concedere in via generale che l'occasione immediata dell'estensione del concetto di numero fu fornita da rappresentazioni non aritmetiche (tuttavia, questo non è stato affatto il caso per quel che riguarda l'introduzione dei numeri complessi). Ma ciò senza dubbio non costituisce una ragione sufficiente per raccogliere queste rappresentazioni nella stessa scienza dei numeri, cioè nell'aritmetica. Come i numeri negativi e razionali fratti debbono e possono essere introdotti con un libero atto creativo, e come le leggi delle operazioni su di loro si debbono e si possono ricondurre alle leggi delle operazioni sui numeri interi positivi – allo stesso modo si deve cercare di dare una definizione completa dei numeri irrazionali unicamente per mezzo dei numeri razionali. Rimane soltanto la questione: come farlo?

Dal confronto fatto sopra tra il campo R dei numeri razionali e la retta siamo stati portati a riconoscere il carattere lacunare, incompleto, la discontinuità del primo, mentre alla retta noi attribuiamo la qualità di essere completa, senza lacune, ossia continua. Ma questa continuità proprio in che cosa consiste?

La risposta a questa domanda deve comprendere in sé tutto, ed essa soltanto permetterà di svolgere su basi scientifiche lo studio di *tutti* i campi continui. Naturalmente, nulla si raggiunge quando, per spiegare la continuità, si parla in modo vago di una connessione ininterrotta nelle parti più piccole; ciò che si richiede invece è di formulare una proprietà caratteristica e precisa della continuità, la quale possa servire di base a deduzioni vere e proprie. Vi avevo pensato senza frutto per molto tempo, ma finalmente trovai ciò che cercavo. Il mio risultato sarà forse giudicato da varie persone in vario modo, ma la maggior parte, credo, sarà concorde nel ritenerlo assai banale. Esso consiste nella considerazione seguente. Si è rilevato nel § precedente che ogni punto p della retta determina una decomposizione della medesima in due parti di tale natura che ogni punto di una di esse sta a sinistra di ogni punto dell'altra. Ora io vedo l'essenza della continuità nell'inversione di questa proprietà, e cioè nel principio seguente:

«Se una ripartizione di tutti i punti della retta in due classi è di tale natura che ogni punto di una delle classi sta a sinistra di ogni punto dell'altra, allora esiste uno e un solo punto dal quale questa ripartizione di tutti i punti in due classi, o questa decomposizione della retta in due parti, è prodotta».

Come ho già detto, credo di non sbagliare ammettendo che ognuno riconoscerà subito l'esattezza del principio enunciato. La maggior parte dei miei lettori proverà una grande disillusione nell'apprendere che è questa banalità che deve svelare il mistero della continuità. A questo proposito osservo

quanto segue. Che ognuno trovi il principio enunciato tanto evidente e tanto concordante con la sua propria rappresentazione della retta – ciò mi soddisfa al massimo grado, perché né a me né ad altri è possibile dare di questo principio una dimostrazione qualsiasi. La proprietà della retta espressa da questo principio non è che un assioma, ed è solo sotto forma di questo assioma che noi pensiamo la continuità nella retta, che riconosciamo alla retta la sua continuità. Non occorre affatto che lo spazio, se esso ha una reale esistenza, sia necessariamente continuo; moltissime delle sue proprietà rimarrebbero tali e quali, anche se esso fosse discontinuo. Se noi sapessimo con certezza che lo spazio è discontinuo, nulla c'impirebbe, se ci facesse comodo, di colmare le sue lacune nella nostra mente e di renderlo quindi continuo. Ma questa operazione mentale consisterebbe nella creazione di nuovi elementi puntuali e dovrebbe essere eseguita conformemente al principio suddetto.

§ 4

LA CREAZIONE DEI NUMERI IRRAZIONALI

Le ultime parole illuminano chiaramente la via per la quale si può giungere a un campo continuo, ampliando il campo discontinuo R dei numeri razionali. Nel § 1 (III) abbiamo rilevato che ogni numero razionale a determina una ripartizione del sistema R in due classi A_1, A_2 di tale natura che ogni numero a_1 della prima classe A_1 è minore di ogni numero a_2 della seconda classe A_2 ; il numero a stesso è o il numero massimo della prima classe, o il numero minimo della seconda. Ora, noi chiameremo *sezione* e indicheremo col simbolo (A_1, A_2) ogni ripartizione del sistema R in due classi A_1, A_2 che goda soltanto di questa proprietà caratteristica che ogni numero della classe A_1 sia minore di ogni numero della classe A_2 . Possiamo dire allora che ogni numero razionale a determina una sezione o piuttosto due sezioni, le quali però noi non considereremo come essenzialmente distinte. Questa sezione gode *inoltre* della proprietà ulteriore, che o tra i numeri della prima classe esiste un numero massimo, o tra i numeri della seconda classe esiste un numero minimo. E inversamente, se una sezione gode di quest'ultima proprietà, allora essa è prodotta da questo numero razionale massimo o minimo.

Ma è facile provare l'esistenza di infinite sezioni non prodotte da nessun numero razionale. [...]

Nel fatto che non tutte le sezioni sono prodotte da numeri razionali consiste l'incompletezza o la discontinuità del campo R di tutti i numeri razionali.

Orbene, ogni volta che è data una sezione (A_1, A_2) che non sia prodotta da nessun numero razionale, noi *creiamo* un nuovo numero, un numero *irrazionale* α , che noi consideriamo come completamente definito da questa sezione; noi diremo che il numero α corrisponde a questa sezione e che esso la produce. Adesso dunque ad ogni sezione corrisponde uno ed un

solo numero determinato, razionale o irrazionale, e noi considereremo come distinti due numeri, quando e solo quando essi corrispondono a due sezioni sostanzialmente distinte.

RICHARD DEDEKIND, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*.

¹⁾ In seguito dunque i termini «maggiore» e «minore», se non saranno accompagnati dalle parole «in valore assoluto», verranno intesi nel senso algebrico [N.d.A.]

²⁾ Il pregio apparente di questa definizione del numero, cioè la sua generalità, sparisce quando si pensa ai numeri complessi. Il mio parere invece è che il concetto di rapporto fra due grandezze dello stesso genere possa essere sviluppato solo quando i numeri irrazionali siano già stati introdotti. [N.d.A.]