2.4.7
MENGHINI

2. Le serie indeterminate: la serie di Guido Grandi e la sua interpretazione. Riflessioni sul suo ruolo didattico

Una delle più celebri serie indeterminate della storia della matematica è la serie di Grandi. Nel 1703, Guido Grandi (1671-1742) affermò:

"Mettendo in modo diverso le parentesi nell'espressione $1-1+1-1+\ldots$ io posso, volendo, ottenere 0 o 1. Ma allora l'idea della creazione *ex nihilo* è perfettamente plausibile" (citato in: Silov, 1978, I, p. 185).

La constatazione di Grandi è riferita alla situazione seguente:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0+0+0+0+\ldots = 0$$

$$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 1+0+0+0+\ldots = 1$$

La serie a segni alterni $\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i = 1-1+1-1+\ldots$ veniva eguagliata da Jakob Bernoulli (e, come vedremo, da molti altri matematici del XVIII secolo) al valore ½. Secondo Grandi, la "dimostrazione" di ciò può essere ricondotta allo sviluppo seguente (che modernamente sappiamo essere valido soltanto con la condizione $|x|<1$):

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{+\infty}(-x)^i = 1-x+x^2-x^3+\ldots$$

Serie binomiale

Ponendo in tale formula $x = 1$ (ed evidentemente tale posizione *non* rispetta la condizione sopra ricordata: $|x|<1$) seguirebbe infatti: $\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i = 1-1+1-1+\ldots = ½$.

Dal punto di vista didattico, osserviamo che lo stesso risultato potrebbe essere ottenuto anche nel modo seguente:

$$s = 1-1+1-1+\ldots \Rightarrow s = 1-(1-1+1-\ldots) \Rightarrow s = 1-s \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

Ovviamente si tratta di un procedimento del tutto inaccettabile, in quanto è basato sull'implicita ammissione che la scrittura $1-1+1-1+\ldots$ indichi un numero s; è oggi ben noto che la successione delle somme parziali associata alla serie di Grandi non ammette alcun limite: da ciò segue che tale serie non ammette somma.

Della serie di Grandi si occupò anche Gottfried Wilhelm Leibniz, il quale assunse talvolta una posizione prudente, come possiamo rilevare dalla seguente lettera a Jacopo Riccati (1676-1754):

"Giudizio del Sig.r Leibnizio intorno la Dissertazione del Co. Jacopo Riccati [...] Io vi supplico Signore di ringraziare il Sig.r Conte Riccati, ed il Sig.r Zendrini della bontà, che mostrano per me. Io vorrei loro poter essere utile in qualche cosa. Frattanto io desidero che essi continuino ad introdurre in Italia le scienze profonde. Io non so s'eglino abbiano veduto quello ch'ho notato sopra la questione se $1-1+1-1$ ecc. all'infinito è uguale a ½ come il R. P. Grandi ha asserito, e in qualche maniera con ragione. Imperciocché $1/(1+x)$ è $1-x+xx-x^3+x^4-x^5$ ecc. ed allora che la lettera x si eguaglia ad 1, ne vien $1/(1+1) = 1-1+1-1+1-1$ ecc. $= ½$. In questo mentre sembra, che questo sia un assurdo manifesto. Negli Atti di Lipsia io credo di aver dato lo scioglimento di questo enigma della scienza dell'infinito" (la lettera, trasmessa a Riccati tramite Bourguet, è senza data, ma probabilmente venne scritta intorno al 1715).

Come ricordato alla fine di questa citazione, Leibniz si occupò della serie di Grandi anche in alcune lettere a Christian Wolf (1678-1754) del 1713, nelle quali veniva introdotto un interessante argomento probabilistico che influenzò matematici della statura di Johann Bernoulli (1667-1748) e di Daniel Bernoulli (1700-1782).

Leibniz osservava che "interrompendo" la serie $1-1+1-1+\ldots$ dopo un numero qualsiasi di addendi, è possibile ottenere come risultato 0 o 1 con la stessa "probabilità" (0 considerando un numero pari di addendi; 1 considerando un numero dispari di addendi). Dunque il valore che può essere ritenuto più "probabile" dell'intera somma di infiniti addendi verrebbe ad essere la media aritmetica tra 0 e 1, ovvero ½. Citiamo a tale riguardo la testimonianza del matematico veneziano G. Grones, che nel 1831 scrisse (ricordando proprio le lettere di Leibniz a Wolf pubblicate negli *Acta Eruditorum Lipsiae*):

"Rinnovellatosi dal preclarissimo geometra p. Guido Grandi la quistione se $1-1+1-1\ldots\infty$ sia $= ½$, e come si possa evitare l'assurdo, mentre essendo $1-1 = 0$ sembra che tutta la serie a null'altro debba ridursi che a zero; quantunque non si possa altronde negare che se nella serie $1/(1+x)$ è $1-x+xx-x^3\ldots\infty$ si faccia $x = 1$ non abbiasi $½ = 1-1+1-1\ldots\infty$; il dottissimo Wolf chiese al Leibnitz la spiegazione dell'enimma. Questo sommo matematico, poi che ha osservato che se la serie è finita, consti d'un numero pari di membri e termini in meno, siccome sarebbe $1-1$ ovvero $1-1+1-1$ dà zero per risultamento: e se consti d'un numero dispari di membri e termini in più siccome 1 ovvero $1-1+1$ etc. dà sempre l'unità, stabilisce: *E quando la serie è infinita, ovvero quando 1−1+... etc. supera un qualsivoglia numero di addendi, allora, non potendosi più assegnare il numero degli addendi, diviene impossibile dare a tale numero la qualifica di pari o di dispari: dunque [...] il passaggio dal finito all'infinito corrisponde a quello dai valori 0 e 1 (che vengono meno) all'unica media tra di essi*" (Grones, 1831, pp. 37-38).

Osserviamo che argomentazioni di questo genere saranno considerate accettabili anche da matematici molto profondi tra il XVIII ed il XIX secolo, come Joseph Louis Lagrange (1736-1813) e Siméon Denis Poisson (1781-1840).

Le considerazioni finora ricordate non erano però condivise da tutti i matematici del XVIII secolo. Jacopo Riccati, ad esempio, criticò la diffusa posizione riguardante la convergenza della serie di Grandi ad ½ nel proprio *Saggio intorno al sistema dell'universo* (pubblicato nel 1754, anno della morte del matematico italiano), in cui scrisse:

"Quanto il discorso è ingegnoso, altrettanto è fallace, perché si tira dietro delle insanabili contraddizioni. E vaglia il vero; assunta la frazione $n/(1+1)$, col solito metodo ne formo la serie $n-n+n-n+n-n+n-n$ et.cet. $= n/(1+1)$. E giacché si verifica l'equazione $1-1 = n-n$, o sia $1+n = n+1$, ne segue, che, prorogate del pari all'infinito amendue le progressioni, tanti nulla nè più nè meno conterrà la prima, quanti la seconda. Ma sta in mio arbitrio dinotare per la spezie n qualsisia quantità finita, o infinitamente grande, o piccola d'ogni genere; dunque gl'infiniti zeri saranno eguali a norma della supposizione, che mi piacerà d'eleggere, a grandezze tali, che fra loro si risponderanno non solamente in qualunque assegnabile proporzione, ma di più in una o per un verso, o per l'altro infinitamente lontana".

L'argomentazione riccatiana merita una breve spiegazione; dopo aver ottenuto l'uguaglianza $\frac{1}{2} = 1-1+1-1+...$, "col solito metodo" si consideri la:

$$\frac{n}{2} = n-n+n-n+...$$

Confrontiamo però le due serie; possiamo scrivere:

$$s = 1-1+1-1+1-1+... = (1-1)+(1-1)+(1-1)+... = 0+0+0+...$$

$$s' = n-n+n-n+n-n+... = (n-n)+(n-n)+(n-n)+... = 0+0+0+...$$

In base a ciò, Riccati afferma che "prorogate del pari all'infinito amendue le progressioni, tanti nulla nè più nè meno conterrà la prima, quanti la seconda" ed è dunque impossibile che esse siano uguagliabili a due "grandezze" diverse. Da ciò egli ritiene di concludere che l'affermazione di Grandi non è accettabile.

Se l'argomentazione è criticabile (in quanto basata sul "solito metodo", ovvero considerando possibili alcune operazioni che sono prive di senso se impostate con riferimento a serie indeterminate), la conclusione espressa da Jacopo Riccati appare chiara e corretta:

"Il paralogismo consiste in ciò, che il lodato Scrittore ha fatto uso d'una serie tra quelle, che dagli Analisti si chiamano parallele, dalle quali, come altresì dalle divergenti, nulla ci vien fatto di concludere. E la ragione si è, che per quanto si vada avanzando nella progressione, non succede mai, che i termini susseguenti possano trascurarsi, siccome incomparabili cogli antecedenti; la qual proprietà alle sole serie convergenti si compete".

La considerazione di Riccati è dunque inserita nella mentalità che il mondo matematico andava lentamente ma progressivamente sviluppando dalla metà del XVIII secolo, ovvero verso la moderna consapevolezza dei rischi associati all'impiego scarsamente rigoroso delle serie non convergenti (indeterminate, come la serie di Grandi, e divergenti). Nella sostanza, la posizione riccatiana anticipò quella espressa nel 1768 da Jean Baptiste Le Rond D'Alembert (1717-1783), ben riassunta dall'affermazione:

"Per quanto mi riguarda, riconosco che tutti i ragionamenti e i calcoli basati su serie non convergenti [...] mi sembrano sempre estremamente sospettosi".

3. Le serie numeriche: un test per allievi della scuola secondaria superiore

Un'analisi del comportamento degli allievi è stata condotta esaminando quattro classi del liceo scientifico (a Treviso) per un totale di 88 studenti, 45 della III classe (allievi di 16-17 anni) e 43 della IV classe (allievi di 17-18 anni). Tutti avevano seguito, fino al momento della prova, un corso tradizionale di matematica, nel quale *non* erano state incluse questioni specificamente attinenti le serie numeriche. Agli allievi, all'inizio della classe III, era stato introdotto il concetto di insieme infinito come insieme equipotente ad una sua parte propria.

A tutti gli allievi sono stati proposti i seguenti test (per affrontare il test 1, agli studenti sono stati accordati 20 minuti; quindi il test 1 è stato ritirato ed è stato consegnato il test 2, per affrontare il quale sono stati accordati altri 20 minuti; quindi il test 2 è tato ritirato ed è stato consegnato il test 3, per affrontare il quale sono stati accordati 10 minuti; non è stato concesso l'uso di calcolatrici, di tavole numeriche, di libri o di appunti):

Test 1

❶ *Leggi con attenzione:*

Conosci il paradosso di Achille e della Tartaruga? C'è una gara di corsa tra il veloce Achille e la Tartaruga. Achille concede un tratto di vantaggio alla Tartaruga; dopo la partenza, Achille impiega un certo tempo per coprire tale tratto; ma in quell'intervallo di tempo la Tartaruga percorre un'altra distanza; quindi Achille deve impiegare un ulteriore intervallo di tempo per coprire tale seconda distanza; ma in quell'intervallo di tempo la Tartaruga percorre un terzo tratto, e così via, indefinitamente... Potrebbe sembrare che il pur velocissimo Achille non raggiungerà mai la Tartaruga! E ciò è chiaramente inverosimile.

Riflettiamo, però, con attenzione: supponiamo, per fissare le idee, che il vantaggio concesso da Achille alla Tartaruga sia di 100 m e che Achille vada 10 volte più veloce della Tartaruga. Una volta che Achille avrà raggiunto la posizione di partenza della Tartaruga, essa avrà percorso 10 m. Raggiunta questa seconda posizione, Achille avrà uno svantaggio di 1 m; la Tartaruga si sarà nuovamente spostata; ma, raggiunto quest'altro punto, Achille avrà uno svantaggio di 1/10 di m... Dunque, per raggiungere la Tartaruga, Achille dovrà percorrere una distanza, in metri, così espressa:

$$100+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots$$

(nota bene: *in questa somma puoi considerare un numero di addendi a tuo piacere: puoi cioè "proseguirla" finché vuoi*). La distanza totale, in metri, è

111,1111... ed è dunque un numero ben determinato. Tale distanza *non* è infinita: Achille avrà già superato la Tartaruga, ad esempio, dopo 111,1112 m!

❷ *Rispondi* (per ogni domanda, indica la tua risposta barrando una casella):

(a) Sommando un numero infinito di addendi:
- si può ottenere un risultato infinito ☐
- non si può ottenere un risultato infinito ☐

(b) Sommando un numero infinito di addendi:
- si ottiene sempre un risultato infinito ☐
- non sempre si ottiene un risultato infinito ☐

(c) La somma di tutte le (infinite) potenze di 1/3: $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots$
- è certamente infinita ☐
- è certamente finita ☐
- non ho elementi sufficienti per decidere se essa è finita o infinita ☐

(d) La somma: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$ (gli infiniti addendi seguenti sono $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$):
- è certamente infinita ☐
- è certamente finita ☐
- non ho elementi sufficienti per decidere se essa è finita o infinita ☐

Test 2

❶ *Leggi con attenzione:*

Un matematico francese, Nicola d'Oresme, vissuto nel XIV secolo, si occupò della somma di infiniti addendi che oggi chiamiamo *serie armonica* e che scriviamo:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots$$

Egli suggerì di porre $1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$ ovvero di raggruppare le frazioni in parentesi contenenti rispettivamente 1, 2, 4, 8, ... frazioni. La somma delle frazioni situate in ciascuna parentesi è allora non minore di ½ (puoi controllare tu stesso); ed è evidentemente possibile, operando in questo modo, ottenere un *qualsiasi* numero di parentesi. Dunque Nicola dimostrò che la somma della serie esaminata viene ad essere maggiore di ogni costante arbitrariamente scelta.

❷ *Rispondi* (per ogni domanda, indica la tua risposta barrando una casella):

(a) Sommando un numero infinito di addendi:
- si può ottenere un risultato infinito ☐

non si può ottenere un risultato infinito ☐

(b) Sommando un numero infinito di addendi:
si ottiene sempre un risultato infinito ☐
non sempre si ottiene un risultato infinito ☐

(c) Sommando un numero infinito di addendi *sempre più piccoli*:
si ottiene un risultato infinito ☐
si ottiene un risultato finito ☐
non ho elementi sufficienti per decidere se il risultato è finito o infinito ☐

(d) La somma $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\ldots$ di tutti i reciproci dei naturali dispari:
è certamente infinita ☐
è certamente finita ☐
non ho elementi sufficienti per decidere se essa è finita o infinita ☐

(e) La somma $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ldots$ di tutte le (infinite) potenze di 1/4:
è certamente infinita ☐
è certamente finita ☐
non ho elementi sufficienti per decidere se essa è finita o infinita ☐

Test 3

Nel 1703, il matematico Guido Grandi si occupò della scrittura: $1-1+1-1+\ldots$ (gli infiniti addendi seguenti sono sempre $+1$ e -1, alternati).
Qual è la tua opinione su di essa?

Osserviamo che le prime due domande dei test 1 e 2 sono le stesse: tra gli scopi della ricerca, quindi, abbiamo incluso la possibilità di una riflessione critica e di *una riconsiderazione delle proprie risposte.*

Il test 3 non richiede un *risultato*, bensì un'*opinione* (senza una griglia di possibili risposte): non abbiamo dunque voluto proporre agli studenti le tecniche tradizionali di indagine sulla serie di Grandi, per evidenziare l'approccio spontaneo di allievi al problema, anche considerando che essi avevano appena considerato (nei test 1 e 2) alcuni esempî di serie convergenti e divergenti.