26. L'ANALISI DEGLI INFINITESIMI

«E questi invero sono soltanto gli inizi di una geometria molto più sublime», aveva annunciato Leibniz in chiusura della sua *Nova Methodus*. Tra coloro che più contribuirono a dar corpo alle sue profetiche parole, oltre allo stesso Leibniz, vi furono i due fratelli Jakob e Johann Bernoulli.
Essi si impadronirono ben presto delle nuove tecniche e le applicarono allo studio di fenomeni inesplorati. Con i loro lavori essi contribuirono in maniera decisiva, non solo a diffondere le idee di Leibniz, ma ad arricchire di nuovi territori il continente del calcolo differenziale.
Nel 1692, durante il soggiorno a Parigi, Johann Bernoulli insegnò gli elementi del calcolo leibniziano a un giovane marchese dilettante di matematiche, G.F. de L'Hospital. Nel 1696 questi diede alle stampe un volume ispirato a quelle lezioni, l'*Analyse des infiniment petits*, che rappresentò il primo trattato di calcolo differenziale ed esercitò un'influenza enorme sullo sviluppo della matematica per tutta la prima metà del Settecento. Nei brani che seguono l'Hospital spiega l'importanza del nuovo calcolo per lo studio delle curve (A), introduce le due «supposizioni» fondamentali su cui esso si basa (B) e infine, illustra la regola (C) che egli aveva appresa da Bernoulli e che tuttavia, ancora oggi, porta il suo nome.

(A) L'analisi che viene spiegata in quest'opera presuppone quella comune, ma ne è molto diversa. L'analisi ordinaria non tratta che di grandezze finite: questa penetra fino nell'infinito stesso. Essa confronta le differenze infinitesime delle grandezze finite; scopre i rapporti di queste differenze, e per questa via fa conoscere quelli delle grandezze finite, le quali confrontate con questi infinitesimi sono come altrettanti infiniti. Si può dire addirittura che questa analisi si estende al di là dell'infinito, poiché non si limita alle differenze infinitesime, ma scopre i rapporti delle differenze di queste differenze, e ancora quelli delle differenze terze, quarte e così via senza mai trovare un termine che la possa fermare. Di modo che essa non abbraccia solamente l'infinito, ma l'infinito dell'infinito, o un infinità di infiniti.
Solo un'analisi di questa natura poteva condurci fino ai veri principi delle linee curve. Non essendo le curve che dei poligoni con un'infinità di lati e non differendo tra loro che per la differenza degli angoli che questi lati infinitesimi formano tra di loro, compete solo all'analisi degli infinitesimi di determinare la posizione di questi lati per avere la curvatura che essi formano, ossia le tangenti di queste curve, le loro perpendicolari, i loro punti di flesso o di regresso, i raggi che vi si riflettono o che vi si rifrangono ecc.
I poligoni iscritti o circoscritti alle curve che, con la moltiplicazione infinita dei loro lati si confondono infine con esse, sono stati da sempre presi al posto delle curve stesse. Ma ci si era fermati là: è stato solo dopo la scoperta dell'analisi qui trattata, che si è compresa appieno l'estensione e la fecondità di questa idea.

GUILLAUME FRANÇOIS DE L'HOSPITAL, *Analyse des infiniment petits*, pref.

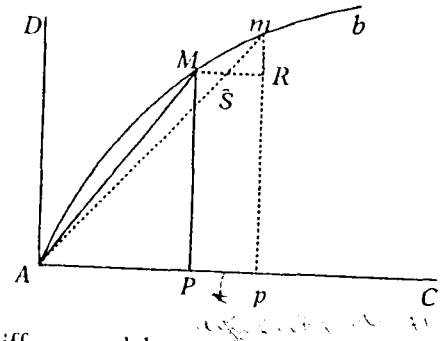
(B)

DEFINIZIONE I

Si chiamano quantità variabili quelle che aumentano o diminuiscono continuamente e, al contrario, quantità costanti quelle che restano le stesse mentre le altre variano. [...]

DEFINIZIONE II

La porzione infinitesima di cui una quantità variabile aumenta o diminuisce continuamente, ne è chiamata la *differenza*. Sia per esempio AMB una linea curva qualunque, che abbia per asse o diametro la linea AC e per una delle applicate la retta PM; e sia un'altra applicata *pm* infinitamente vicina alla prima. Ciò posto, se si tracciano MR parallela a AC, le corde AM, Am e si descrive con centro A e intervallo [raggio] AM l'archetto di cerchio MS, Pp sarà la differenza di AP, Rm quella di PM, Sm quella di AM e Mm quella dell'arco AM. Analogamente, il piccolo triangolo MAm che ha per base l'arco Mm, sarà la differenza del segmento AM e il piccolo spazio MPm quella dello spazio compreso tra le rette AP, PM e l'arco AM.



Corollario

1. È evidente che la differenza di una quantità costante è nulla o zero: ovvero (ciò che è la stessa cosa) le quantità costanti non hanno affatto differenza.
[...]

I. RICHIESTA O SUPPOSIZIONE

2. Si richiede che si possa prendere indifferentemente l'una per l'altra due quantità che non differiscono tra di loro che per una quantità infinitesima: ovvero (ciò che è la stessa cosa) una quantità che è aumentata o diminuita solo di un'altra quantità infinitamente più piccola di essa, può essere considerata come restante la stessa. Si richiede per esempio che si possa prendere Ap in luogo di AP, *pm* in luogo di PM, lo spazio Apm per lo spazio APM, il piccolo spazio MPpm per il piccolo rettangolo MPpR, il piccolo settore AMm per il piccolo triangolo AMS, l'angolo pAm per l'angolo PAM ecc.

II. RICHIESTA O SUPPOSIZIONE

3. Si richiede che una linea curva possa essere considerata come la collezione di una infinità di linee rette, ciascuna infinitesima: ovvero (ciò che è la stessa cosa) come un poligono di un numero infinito di lati, ciascuno infinitesimo, i quali determinano mediante gli angoli che essi formano tra di loro la curvatura della linea. Si richiede per esempio che la porzione della curva Mm e l'arco di cerchio MS possano essere considerati come delle linee rette per via della loro infinita piccolezza, di modo che il piccolo triangolo mSM possa essere considerato rettilineo.

GUILLAUME FRANÇOIS DE L'HOSPITAL, *Analyse des infiniment petits* (2ª ed.), Paris 1715, pp. 1-3.

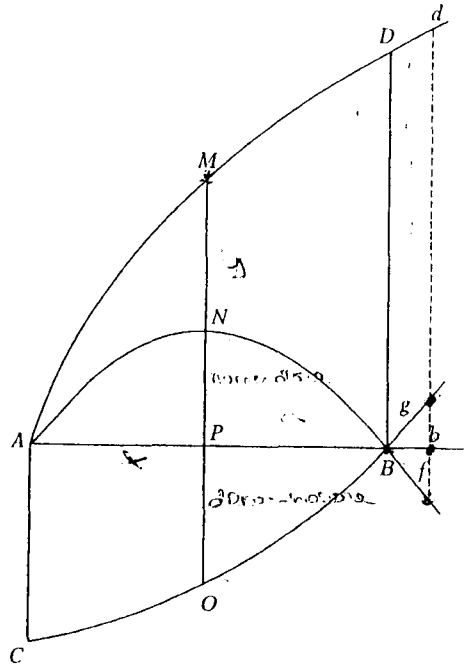
(C) PROPOSIZIONE I

Problema

Sia AMD (AP = x, PM = y, AB = a) una linea curva tale che il valore dell'applicata y sia espresso da una frazione il cui numeratore e denominatore diventano ciascuno zero quando $x = a$, ossia quando il punto P cade sul punto dato B. Si domanda quale debba essere allora il valore dell'applicata BD.
Si considerino due linee curve ANB, COB che abbiano per asse comune la linea AB e che siano tali che l'applicata PN esprima il numeratore e l'applicata PO il denominatore della frazione generale soddisfatta da tutte le PM, di modo che

$$PM = \frac{AB \times PN}{PO}.$$

È chiaro che queste due curve si incontreranno nel punto B poiché per ipotesi PN e PO diventano ciascuna zero quando il punto P cade in B. Ciò posto, se si immagina un'applicata *bd* infinitamente vicina a BD e che incontra le li-



nee curve ANB, COB nei punti *f*, *g* si avrà $bd = \frac{AB \times bf}{bg}$, che [art. 2] non differisce da BD.
Non si tratta dunque che di trovare il rapporto di *bg* con *bf*. Ora si vede che, quando l'intercetta AP diventa AB, le applicate PN e PO diventano nulle e che, quando AP diventa Ab, esse diventano *bf*, *bg*. Dal che segue che queste stesse applicate *bf*, *bg* sono la differenza delle applicate in B e *b* rispetto alle curve ANB, COB e quindi che se si prende la differenza del numeratore e la si divide per la differenza del denominatore, dopo aver posto $x = a =$ Ab o AB si avrà il valore cercato dell'applicata *bd* o BD. Cosa che bisognava trovare [1]).

GUILLAUME FRANÇOIS DE L'HOSPITAL, *Analyse des infiniment petits*, Sez. IX.

1) La «regola de L'Hospital» si può tradurre in termini moderni nell'enunciato seguente: se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue e derivabili con derivata continua nell'intorno di un punto x_0 per cui $f(x_0) = g(x_0) = 0$ e $g'(x_0) \neq 0$ allora si ha che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

27. IL *METODO DEGLI INTEGRALI* DI JOHANN BERNOULLI

Nell'elaborazione di Leibniz, la preminenza era data alle «differenze» e, del resto, nella *Nova Methodus* egli si era limitato alla presentazione del solo calcolo differenziale. Fin dall'epoca della sua corrispondenza con Newton egli era tuttavia in possesso anche delle idee fondamentali del calcolo inverso, del calcolo integrale. Per indicare l'integrale di un certo differenziale ω egli in un primo tempo, ispirandosi alla *Geometria* di Cavalieri (vedi par. 5 di questo capitolo), aveva adottato espressioni come *omnia* ω oppure *omn* ω, intendendo l'integrale come somma di elementi infinitesimi. Fin dall'ottobre del 1675 egli aveva tuttavia osservato che «sarà utile scrivere ∫ al posto di *omn*, così come ∫l al posto di *omn l*, ossia la somma delle l». Così, se ∫l = *ya*, allora, continuava Leibniz, il calcolo inverso darà l = *ya/d*, «infatti come ∫ aumenta, così *d* diminuisce le dimensioni. ∫ d'altra parte significa somma, *d* differenza». Solo in un secondo tempo Leibniz abbandonò l'infelice scelta notazionale per il differenziale, optando per quella diventata usuale.
Oltre a Leibniz, allo sviluppo del calcolo integrale contribuirono in modo determinante i fratelli Bernoulli. Durante il suo soggiorno parigino nel 1692, Johann diede al marchese de L'Hospital (par. 25 di questo capitolo) anche delle lezioni di calcolo integrale. Quelle *Lectiones mathematicæ de methodo integralium* furono tuttavia pubblicate solo nel 1742, nell'edizione delle opere del matematico di Basilea.
Nelle *Lectiones* Johann Bernoulli presentava le regole di integrazione della potenze x^p e illustrava con una serie di esempi le tecniche più frequenti nell'integrazione di differenziali di semplici espressioni razionali o irrazionali (A).