FALCOLINI 23/05/07

Per martedì prossimo (il nostro ultimo incontro) discuteremo assieme la vostra tesina! Cioè: a casa preparate la tesina e la consegnate a me martedì. Questa tesina sarà il voto del vostro esame. Chi non la fa, prenderà (se è stato presente alle lezioni) un voto lo stesso perché è un laboratorio e la presenza è importante. Questa tesina dovrà essere (orientativamente) di circa 3 pagine. Dovrete scegliere un aspetto di uno dei due giochi trattati in questo corso (il 10x10 e il NIM) e descrivere come li presentereste in una classe di liceo, durante un laboratorio. Sottolineando le motivazioni e le difficoltà che si potrebbero incontrare nel presentarlo. Si vuole far divertire gli alunni, ma anche far fare loro congetture sulle soluzioni e poi andare a controllare assieme l'esattezza.

Quindi la tesina sarà una proposta didattica, in cui si discute su come in una classe potrebbero funzionare questi giochi. Non deve essere solo teorica, bisognerà discutere la parte del gioco che vogliamo spiegare e i relativi aspetti matematici. Scrivere qualcosa sulla matematica che c'è dietro, cosa è utile, cosa è possibile fare e in che forma.

Se martedì qualcuno non può venire, me lo dovete comunque spedire via mail entro martedì mattina (FALCO@MAT.UNIROMA3.IT)

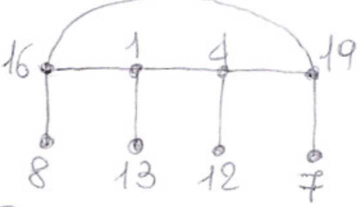
GIOCO: 10 X 10

È possibile risolvere il gioco 5x5 con 25 caselle. L'ultima volta vi avevo chiesto di collegare il gioco 4x4 ad un grafo; e poi di fare il grafo collegato al problema 5x4 ed, infine al 5x5.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

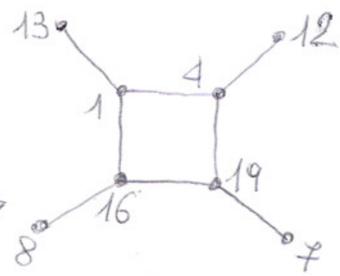
Disegniamo il problema 5x5 ma, inizialmente consideriamo il sottoproblema $\boxed{4\times 4}$

Partendo da 1

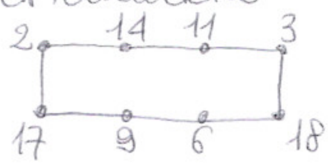


Scritto meglio $\longrightarrow$

c'è un 4-ciclo ⇒ quadrato

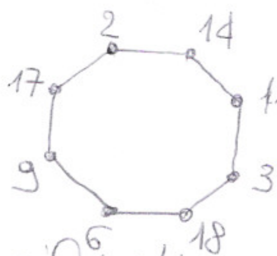


Partendo da 2



Scritto meglio $\longrightarrow$

c'è un 8-ciclo ⇒ ottagono



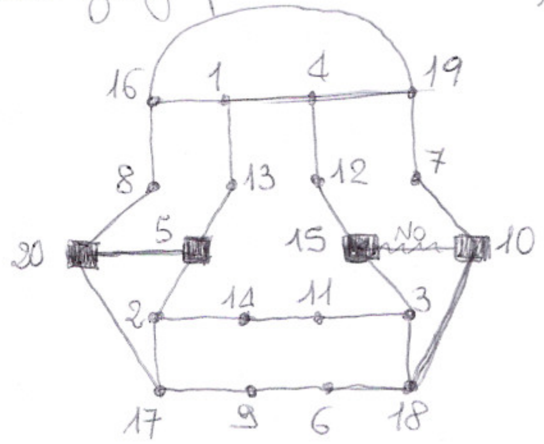
Questi sono grafici piani, con il GEOMAG si può farne il tridimensionale

Consideriamo ora il sottoproblema $\boxed{5 \times 4}$

2

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

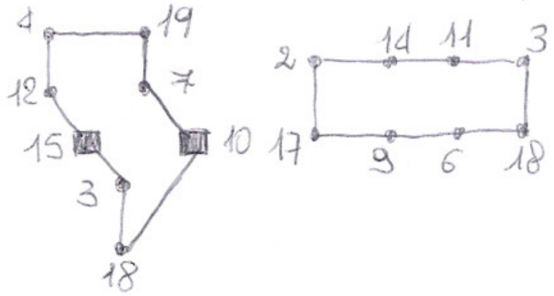
Riguardiamo i due grafi di prima; ora abbiamo un'altra colonna (5, 10, 15, 20). Possiamo unire i due grafi precedenti in questo modo:



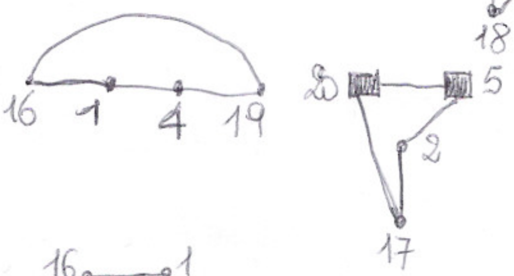
ottenendo il grafo del problema 5×4. Questo è un grafo planare, perchè c'è una rappresentazione piana. È un dato importante che ci indica quanto è semplice il grafo.

Possiamo notare:

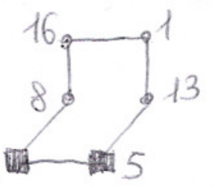
2 cicli di 8 adiacenti tra loro:

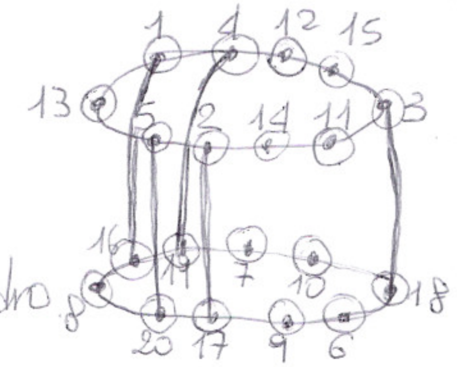


2 cicli di 4:



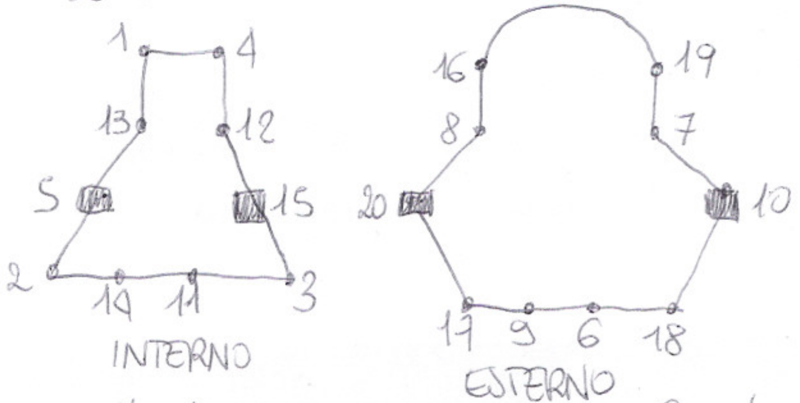
1 ciclo di 6:





Con il geomag viene fuori una specie di cilindro.

Possiamo infatti suddividere il nostro grafo in 2 cicli di 10; uno interno ed uno esterno



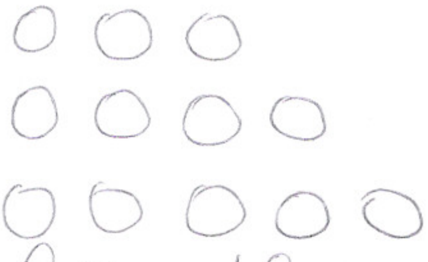
e collegarli con 20–5
1–16
4–19
2–17
3–18

Visto tridimensionalmente, il grafo ci fornisce più informazioni. Ad esempio capiamo che non conviene partire da una pallina che ha un legame, senno dopo mi ritrovo, alla fine, su una pallina senza legami che non mi permette di passare sull'altra base.

Conviene, invece, partire da una pallina che sta vicino ad un legame, così alla fine ripasso dalla parte opposta.
Ad esempio: 14 → 11 → 3 → 15 → 12 → 4 → 1 → 13 → 5 → 2 → 17 → 9 → 6 → 18 → 10 → 7 → 19 → 16 → 8 → 20 →

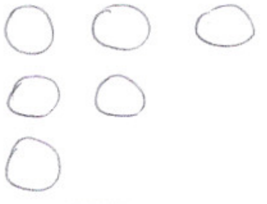
Quindi stiamo trattando la TEORIA DEI GRAFI: determinare, su questo grafo, la soluzione del gioco. Si tratta di trovare un cammino (e cioè una successione di nodi e legami) che tocchi tutti i nodi una ed una sola volta. Questo tipo di cammino si chiama HAMILTONIANO. I grafi si dividono in ham. e in non ham. Un grafo è ham. SE il gioco corrispondente è risolubile. Noi costruiamo solo particolari tipi di grafi, quelli collegabili ad un gioco. Un cammino chiuso è detto ciclo. Un ciclo ham. è un camm. ham. che sia chiuso cioè il cui ultimo nodo è legato al primo nodo con una mossa. Se abbiamo un ciclo abbiamo l'ulteriore informazione che è possibile cominciare da qualunque casella. Quanto è complicato il problema di dire se un grafo qualunque ha un ciclo ham. oppure no? Esistono degli algoritmi che è possibile rappresentare al computer che ci calcolerà tutte le possibili mosse. Un computer lo può fare in qualche minuto per il gioco a 100 caselle. Elabora una lista di cammini e trova la soluzione. Il cilindro non è una soluzione ciclica. Per il caso 6x4 non esiste una soluzione ciclica anche se il grafo è più semplice. Questo tipo di problema cresce all'aumentare del numero dei nodi in modo esponenziale; è un tipico problema P(=polinomiale). Esistono anche i problemi della classe NP(=non polinomiali); è un problema ancora irrisolto capire se c'è una qualche distinzione tra le due classi oppure se P=NP. Se nella TESINA volete parlare di questo gioco (il 10X10) trattatene solo un aspetto: o la simmetria o i grafi! Con questo metodo è possibile risolvere qualunque tabella rettangolare con lati multipli di 5.
Il 5x5 non è planare; quindi conviene costruirlo con il geomag.
Anche se le intersezioni ci sono, planarmente è possibile minimizzare le intersezioni.

GIOCO: NIM



Ci sono delle monete, ad esempio (12) disposte in 3 file. Si gioca in 2 quindi è un gioco di strategia.
Si possono prendere, per ogni fila, almeno una moneta o al max tutte.

Lo scopo del gioco è prendere l'ultima moneta. Posso trovare una soluzione per questo e poi generalizzare a casi più generali. La parte interessante è fare delle ipotesi. La cosa importante da sapere è che esiste una strategia vincente per ogni numero di file e per ogni numero di monete. Consideriamo il caso più semplice (3,2,1)



1ª fila, 2ª fila, 3ª fila
(3 , 2 , 1)

Proviamo a scrivere tutte le mosse.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \boxed{(3,2,1)} \arrow[dl, "1\text{mossa}"'] \arrow[d, "1\text{mossa}"] \arrow[dr, "1\text{mossa}"] & \\
(2,2,1) \arrow[d] & (3,1,1) \arrow[d] & (3,2,0) \\
(1,2,1) \arrow[d] & (3,0,1) & \\
(0,2,1) & &
\end{tikzcd}$$

Con una mossa posso passare da
(3,2,1) a (2,2,1) se levo una sola moneta dalla 1ª fila
a (1,2,1) se levo due monete dalla 1ª fila
a (0,2,1) se ne levo 3
a (3,1,1) se levo 1 moneta dalla 2ª fila
a (3,0,2) se ne levo 2
a (3,2,0) se levo 1 moneta dalla 3ª fila.

Questo è detto ALBERO DELLE MOSSE.
Con quest'albero posso capire se c'è una strategia. Chiameremo:

"S" le mosse sicure ≡ quelle che costruiscono una strategia vincente

"P" le mosse pericolose ≡ non è detto che la strategia sia vincente.

Questo è un gioco in cui c'è sicuramente un vincitore; non può finire in parità.
Ogni mia mossa sarà "accoppiata" ad un'altra mossa ed è per questo che è utile ragionare a "coppie" usando, quindi, il sistema binario.

O O O
O O
O

$$\begin{array}{r} 11 \\ 10 \\ 1 \\ \hline 22 \end{array}$$

- 3 monete; in sistema binario $(3)_{10}=(11)_2$
- 2 monete; $(2)_{10}=(10)_2$
- 1 moneta; $(1)_{10}=(1)_2$

Poi si sommano le cifre (non più in binario)

Se ottengo, sulla somma di ogni colonna, dei numeri pari (anche lo zero è pari) ⇒ ho una configurazione S e quindi c'è una strategia vincente. In ogni caso, se comincio io, sicuramente perdo. Se c'è almeno una colonna dispari ⇒ ho una configurazione P. Se riesco a lasciare una mossa sicura al mio avversario (siccome da S si passa sicuramente a P, mentre da P, se gioco bene, posso passare anche ad S) sicuramente vinco.

Nell'esempio (5,4,3)

1º OOOOO
2º OOOO
3º OOO

"P"

$$\begin{array}{r} 1\,0\,1 \\ 1\,0\,0 \\ 1\,1 \\ \hline 2\,1\,2 \end{array}$$

- $(5)_{10}=(101)_2$
- $(4)_{10}=(100)_2$
- $(3)_{10}=(11)_2$

Nel valore 212 trovo un 1 (dispari), salgo su e vedo che nella 3ª fila c'è un 1 ⇒ sulla 3ª fila muovo tante monete quante ne servono per far diventare quell'1 uno zero. Quindi, nel nostro caso, levo 2 monete così mi rimane una moneta nella terza fila e il calcolo binario è tutto pari.

$$\begin{array}{r} 1\,0\,1 \\ 1\,0\,0 \\ 1 \\ \hline 2\,0\,2 \end{array}$$

Nell'esempio (8, 4 3)

$$\begin{array}{r} 1\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 1\,1 \\ \hline 1\,1\,1\,1 \end{array}$$

considero il dispari che sta più a sinistra e modifico l'1 sulla prima riga.

Se lascio S all'avversario ⇒ l'avversario mi darà P che io riesco comunque a trasformare in S. Se hai P vinci se sei il primo, se hai S vinci se sei il 2º.