Gioco 10x10 (C. Falcolini)

Il gioco consiste nel cercare di riempire una tabella quadrata 10x10 con i numeri progressivi da 1 a 100 partendo da una qualunque casella con il numero 1 e passando alla successiva casella vuota saltando 2 caselle in orizzontale o verticale oppure 1 casella in diagonale (cioè passando ad una qualunque casella unitaria con distanza 3 oppure $2\sqrt{2}$ tra i rispettivi centri).

				2					
		2				2			
	2			1			2		
		2				2			
				2					

8			5						
		2			3				
		7			6				
1			4						

Dopo un certo numero di mosse il gioco può terminare se dalla casella dove si è scritto l'ultimo numero non si può saltare, con la regola assegnata, a nessun altra casella vuota.
Il numero di caselle occupate, e quindi l'ultimo numero che si è riusciti ad inserire, danno il punteggio ottenuto: il gioco consiste nell'ottenere il punteggio più alto, 100, cioè nel riempire con la regola data tutte le caselle (nella tabella a destra il punteggio è 8).

Dopo un certo numero di tentativi ci si accorge che è abbastanza facile ottenere un punteggio alto: è possibile ottenere il punteggio massimo? Si riesce a trovare una strategia che garantisca la soluzione del gioco? In altri termini, oltre a cercare una soluzione casuale è possibile capire a fondo il gioco in modo da determinare diverse soluzioni od immaginare giochi simili ma volutamente più semplici o più difficili?

E' possibile stabilire se il gioco è risolubile per ogni posizione iniziale assegnata? E se si assegna anche la posizione finale?

E' possibile risolvere il problema per una tabella NxN con N più piccolo di 10?
E con N più grande di 10 o anche arbitrariamente grande?

Cosa cambia se consideriamo tabelle rettangolari?

Cosa cambia se consideriamo tabelle sul cilindro (cioè se identifichiamo 2 lati opposti della tabella) o sul toro (cioè se identifichiamo tutte e due le coppie di lati opposti)?

E' possibile anche complicare il gioco immaginando una tabella tridimensionale NxNxN.

E' possibile cambiare la mossa, ad esempio considerando quella del “cavallo” negli scacchi (definendola ad esempio con la condizione che “i centri delle caselle unitarie dove si può saltare siano a distanza $\sqrt{5}$”) e porsi le stesse domande.
La più naturale in questo caso è se un cavallo possa passare per tutte le caselle di una regolare scacchiera (8x8) senza passare due volte per una stessa posizione.

<u>Strategie di soluzione:</u> anche se può sembrare strano, faremo vedere che rispondere a qualcuna delle precedenti domande può aiutare a risolvere il gioco.
Intanto il gioco è effettivamente risolubile per tabelle quadrate con N più piccolo di 10: per N=1 il gioco è banale, per N=2,3,4 non è risolubile mentre per N=5 il gioco non solo ammette una soluzione (ovviamente molto più facile da trovare) ma la ammette, come si può vedere qui sotto, per ogni posizione iniziale assegnata e per qualunque posizione finale da essa raggiungibile con una mossa (perché?).

1	20	5	2	19
14	23	8	11	16
6	3	18	21	4
25	10	15	24	9
13	22	7	12	17

1	21	16	6	22
18	8	24	19	9
13	5	2	12	15
25	20	17	7	23
3	11	14	4	10

Combinando poi quattro soluzioni 5x5 (anzi una sola soluzione, a meno di simmetrie, che si può dedurre dalla prima tabella con posizione iniziale nella casella con il 22 e finale in quella con il 21) si può costruire una soluzione per il caso 10x10 come nella prossima figura.

5	24	9	6	23	28	45	42	27	46
18	2	12	15	20	31	36	39	49	33
10	7	22	25	8	43	26	29	44	41
4	14	19	3	13	38	48	32	37	47
17	1	11	16	21	30	35	40	50	34
98	81	84	99	80	71	52	67	70	53
95	90	87	77	93	58	74	64	61	56
83	100	97	82	85	66	69	54	51	68
88	78	94	89	79	72	62	57	73	63
96	91	86	76	92	59	75	65	60	55

E' da notare che tale soluzione è non solo riconducibile a soluzioni più semplici, opportunamente raccordate e simmetriche tra loro, ma è anche ciclica perché dalla casella con il numero 100 si potrebbe passare a quella con il numero 1. Questa proprietà permette di rispondere ad una delle domande precedenti e cioè che il gioco ha soluzione a partire da qualunque casella iniziale.

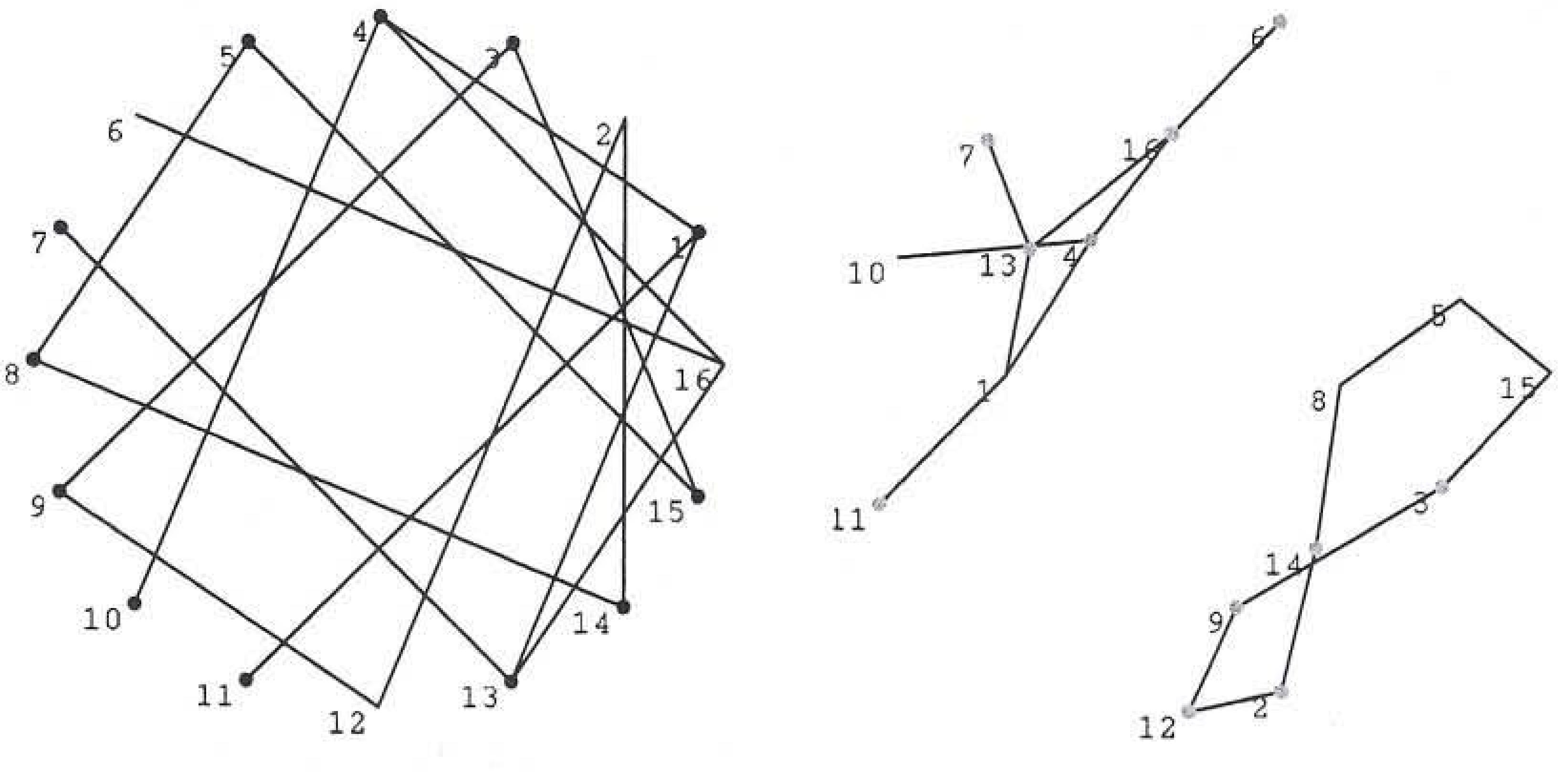
E' possibile ottenere soluzioni cicliche combinando soluzioni 5x5 non cicliche?

Cosa si può dire di soluzioni con anche la posizione finale fissata? E' possibile ad esempio trovare una soluzione con posizione iniziale e finale adiacenti?

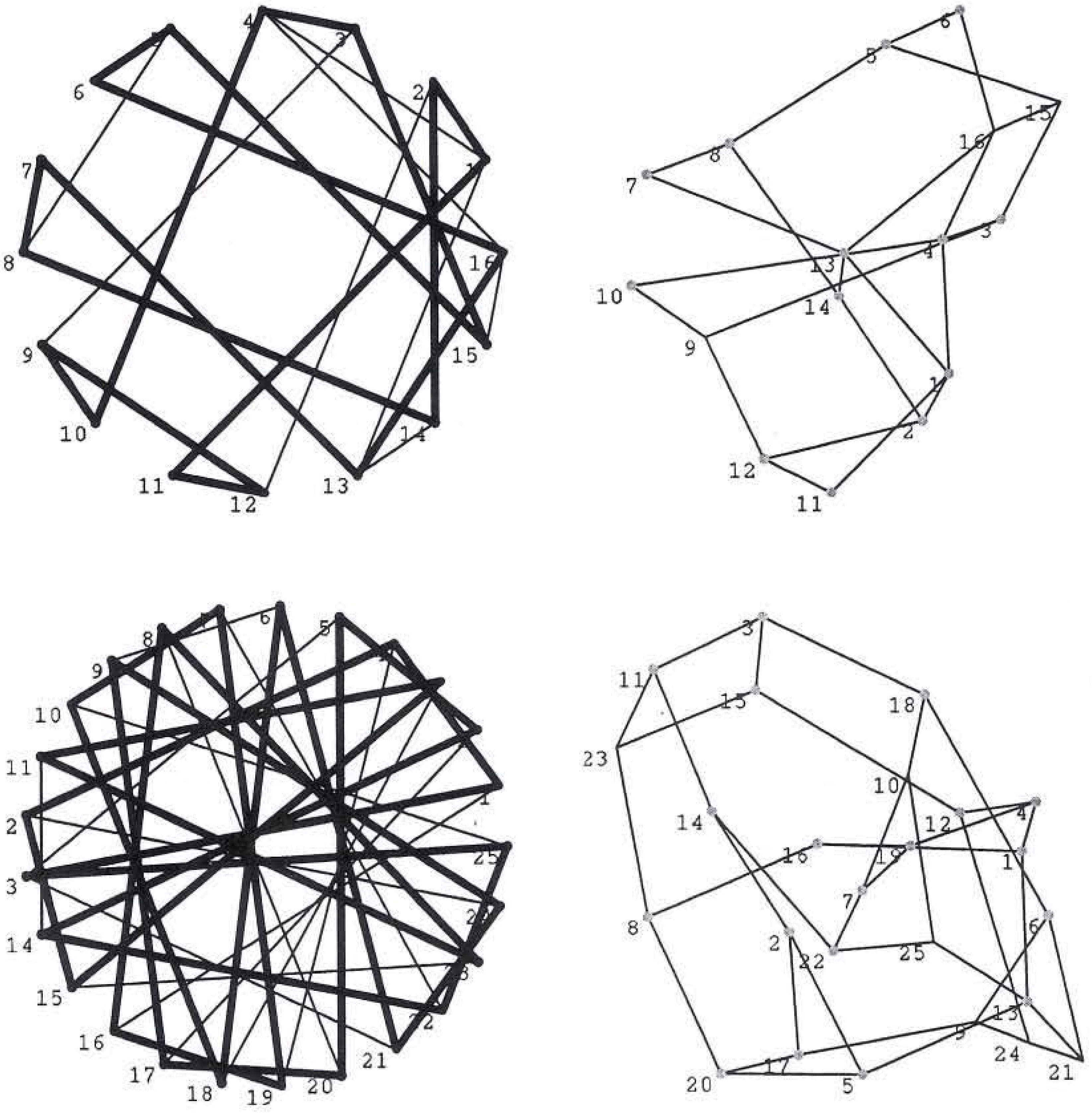
Qual è la più piccola tabella rettangolare risolubile?

Tornando alla soluzione 5x5, ci sono ben 96 diverse soluzioni cicliche (come le due già viste) ed il risultato citato di poter partire da una casella qualunque e riempire la tabella 5x5 in modo ciclico e finendo su una qualunque delle caselle raggiungibili da quella iniziale con una sola mossa, permette di dimostrare un risultato inatteso: è possibile risolvere il gioco per una qualunque tabella NxM se N ed M sono multipli di 5. Questo risultato si basa sul corollario che partendo da una qualunque posizione di una sotto-tabella quadrata 5x5 in due mosse si può sempre arrivare ad un'altra sotto-tabella quadrata adiacente o confinante (con almeno uno spigolo in comune) ed è immediatamente generalizzabile ad una tabella in forma di "polimino" (vedi il gioco dei pentamini).

<u>Uso della Teoria dei Grafi:</u> r come questo sono trattabili in modo naturale associando alla tabella un grafo i cui vertici (o nodi) rappresentano le caselle ed i cui lati (o legami) uniscono due vertici se le corrispondenti caselle sono collegate da una singola mossa. Il grafo sarà non orientato (perché le mosse possono avvenire in entrambi i sensi) ma non necessariamente connesso. In figura il caso 4x4 rappresentato con i vertici equispaziati su una circonferenza e poi separati nelle due componenti connesse:



Le soluzioni del problema sono dette "cammini hamiltoniani" (cioè percorsi che passano una sola volta per tutti i vertici del grafo) e nel caso siano cicliche sono dette "cicli hamiltoniani". In figura il caso 4x4 sul toro ed un ciclo hamiltoniano in evidenza e poi il caso 5x5:



In un grafo connesso il problema di determinare i suoi cicli hamiltoniani è un problema NP-completo cioè di una complessità algoritmica che cresce enormemente al crescere del numero degli elementi del grafo.

In particolare quindi la soluzione trovata per un N molto grande, nel caso fosse ciclica come per il caso N=10, non sarebbe ottenibile con un algoritmo generale da nessun computer esistente.

NIM

Regole

Si gioca in due giocatori. Si dispongono un certo numero di monete (m.) su tre file. Per esempio 3 m. sulla prima, 4 m. sulla seconda e 5 m. sulla terza, in breve indicata con il vettore $(3, 4, 5)$. I giocatori alternativamente tolgono una o più m. da una sola riga. Chi prende l'ultima m. vince.

Alcune considerazioni iniziali

È un gioco di strategia determinato, nel senso che se entrambe i giocatori agiscono al meglio il vincitore è determinato dalla posizione iniziale. È da notare che, come si vedrà, se la disposizione iniziale è determinata casualmente il primo giocatore ha più possibilità di vincere.

Rappresentazione in numeri binari

È utile rappresentare il gioco per mezzo dei numeri binari. Per esempio la posizione iniziale $(3, 4, 5)$ descritta sopra può essere rappresentata nella maniera seguente:

$$\begin{array}{ccccc} & & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & \rightarrow & & 1 & 1 \\ 4 & \rightarrow & 1 & 0 & 0 \\ 5 & \rightarrow & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Posizioni "sicure" e "pericolose"

Definiremo "sicura" S una posizione tale che, dopo aver mosso ci garantisca la vittoria. Diversamente la posizione si dirà "pericolosa" P. Tutte le posizioni possibili vengono dunque distinte in due sole classi separate S e P. Due osservazioni risulteranno cruciali:

1. ogni P lasciata dall'avversario può essere mutata in S con una mossa opportuna (non necessariamente unica)

2. qualsiasi mossa si faccia S è mutata in P.

Per giocare razionalmente quindi un giocatore deve muovere in modo da trasformare ogni P lasciatagli dall'avversario in S. Tuttavia se il vostro avversario gioca razionalmente e vi lasia una S non c'è verso di batterlo!

Quali sono le P e quali le S

Scriviamo i numeri in notazione binaria. Sommiamo i numeri delle colonne. Se tutte le colonne hanno come somma numeri pari allora siamo in S; se invece almeno una colonna dà un numero dispari siamo in P.
Nell'esempio precedente si ottiene:

$$\begin{array}{cccccc} & & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & \longrightarrow & & 1 & 1 \\ 4 & \longrightarrow & 1 & 0 & 0 \\ 5 & \longrightarrow & 1 & 0 & 1 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

quindi, siccome la seconda colonna dà un numero dispari siamo in P. Se invece ci fossimo trovati nella situazione seguente, $(1,4,5)$,

$$\begin{array}{cccccc} & & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & & & 1 \\ 4 & \longrightarrow & 1 & 0 & 0 \\ 5 & \longrightarrow & 1 & 0 & 1 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & 2 & 0 & 2 \end{array}$$

allora saremmo stati in S.
Notiamo che chi vince, cioè leva l'ultima m., lascia la posizione $(0,0,0)$ che è infatti S.

La strategia vincente

Dimostreremo ora le due osservazioni enunciate in precedenza:

1. ogni P lasciata dall'avversario può essere mutata in S con una mossa opportuna (non necessariamente unica)

2. qualsiasi mossa si faccia S è mutata in P.

DIMOSTRAZIONE DI 1. Si consideri l'ultima colonna (partendo da destra) che dà come somma un numero dispari. Esisterà necessariamente una riga che ha nel posto corrispondente alla colonna di cui sopra un 1 (se infatti tutte le righe avessero 0 in quel posto la somma darebbe 0 che è pari). Si sottraggano tante m. da quella riga necessarie a cambiare la parità dei posti (e solo di quelli!) sulle colonne che danno somma dispari; il gioco è fatto. Un paio di esempi risulteranno chiarificatori. Si consideri ancora il caso $(3,4,5)$ che è P. L'ultima (e anche l'unica) colonna che dà somma dispari è la seconda (viene 1). C'è un'unica riga, la prima, che abbia su quella colonna un 1; dobbiamo quindi sottrarre un certo numero di m. da questa riga. Essendo lo schema

$$\begin{array}{cccccc} & & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & \rightarrow & & 1 & 1 \\ 4 & \rightarrow & 1 & 0 & 0 \\ 5 & \rightarrow & 1 & 0 & 1 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

basta cambiare la parità di 1 $(= 1 * 2^1 = 2)$ nella seconda colonna (da destra) facendolo diventare 0 cioè basta togliere 2 m. dalla prima riga e la situa zione $(3,4,5)$ che è P diventa $(1,4,5)$ che è S:

$$\begin{array}{cccccc} & & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & \rightarrow & & & 1 \\ 4 & \rightarrow & 1 & 0 & 0 \\ 5 & \rightarrow & 1 & 0 & 1 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & 2 & 0 & 2 \end{array}$$

Consideriamo ora il caso $(3,4,8)$

$$\begin{array}{cccccc} & & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & \rightarrow & & & 1 & 1 \\ 4 & \rightarrow & & 1 & 0 & 0 \\ 8 & \rightarrow & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

che è P (tutte le colonne danno somma dispari!). L'ultima colonna (da destra) che dà somma dispari è quindi la quarta corrispondente a 2^3. La riga (l'unica) che ha un 1 al quarto posto è la terza 1000 $(= 1 * 2^3 = 8)$, perciò dovrò togliere m. proprio da questa riga. In particolare basta toglierne una sola trasformando $(3,4,8)$ in $(3,4,7)$ che è S

$$\begin{array}{ccccc} & & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & \rightarrow & & 1 & 1 \\ 4 & \rightarrow & 1 & 0 & 0 \\ 7 & \rightarrow & 1 & 1 & 1 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

Osserviamo solo che la mossa risolutiva non è necessariamente una sola. Infatti la situazione $(7,6,4)$ che è P può essere resa S in tre modi diversi: facendola diventare $(2,6,4)$, $(7,3,4)$ o $(7,6,1)$, togliendo rispettivamente 5 m. dalla prima riga, 3 m. dalla seconda o 3 m. dalla terza.

DIMOSTRAZIONE DI 2. È molto semplice: levando un qualsiasi numero di m. da una riga significa cambiare almeno un posto sostituendo $1 \rightarrow 0$ o $0 \rightarrow 1$. Questo significa cambiare la parità della colonna corrispondente che da pari (siamo nel caso S) diventa necessariamente dispari.

Fine della fiera

Dalle osservazioni 1. e 2. mostrate sopra segue necessariamente che, essendo la posizione finale che lascia il giocatore che vince (togliendo l'ultima m.) esattamente $(0,0,0)$ che è S, la strategia giusta è lasciare sempre (se possibile!) una situazione S dopo la propria mossa, in modo tale che l'avversario sarà costretto (vedi osservazione 2.) a trasformarla in P (per lui pericolosa!) e al turno successivo (tramite l'osservazione 1.) noi la si possa ritrasformare in S e così via sino alla vittoria finale! Purtroppo però non sempre questo è possibile! Se infatti l'avversario ci lascia una S per quanto ci si affanni (vedi osservazione 2.) saremmo costretti a lasciargli una P e, se lui gioca bene, perderemmo di sicuro. È quindi chiaro che se i due giocatori si comportano razionalmente la vittoria è determinata dalla posizione iniziale: se questa è una S il primo a muovere è sicuro di perdere se l'avversario gioca bene, se invece è una P il primo giocatore vince sicuramente. Essendo la posizione P più probabile della S se le m. vengono disposte casualmente all'inizio (si può vedere che la probabilitá di avere una P tende a 1 con l'aumentare del numero di m. mentre quella di S tende a 0!) il primo giocatore è avvantaggiato.