ALCUNE CONSIDERAZIONI SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA FINANZIARIA E DELLA MATEMATICA ATTUARIALE NELLA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE

Augusto Freddi

Premesse

Il Decreto legislativo 17 ottobre 2005 n. 226[1], recante "Norme generali e livelli essenziali delle prestazioni relative al secondo ciclo del sistema educativo di istruzione e formazione, a norma della legge 28 marzo 2003, n. 53", prevede l'insegnamento della matematica finanziaria (in forma esplicita) e della matematica attuariale (in forma implicita e limitatamente alle assicurazioni sulla vita classiche) solo per il liceo economico e per il liceo economico e tecnologico. I contenuti informativi e formativi strettamente attinenti alla matematica finanziaria ed alla matematica attuariale sono riportati in Tabella 1.

A coloro che hanno una buona conoscenza di queste due materie è facile constatare che anche in quest'ultima proposta didattica: i) non viene ancora evidenziato alcun legame concettuale tra la matematica finanziaria e le assicurazioni sulla vita e ii) ancora una volta lo spazio assegnato, complessivamente, ad entrambe risulta essere contenuto.

Esse, invece, dovrebbero avere, a mio modo di vedere, e questo è il motivo principale che mi ha spinto a scrivere questo articolo, un maggior peso nel quadro complessivo dell'offerta formativa e informativa della scuola secondaria superiore, per motivi sia culturali che pratici. Basta riflettere, infatti, sulle seguenti informazioni:

i) il totale delle attività finanziarie delle famiglie italiane (famiglie consumatrici, istituzioni senza scopo di lucro al servizio delle famiglie e imprese individuali fino a 5 addetti), a dicembre del 2005, era pari a 3.268,6 miliardi di euro (Banca d'Italia 2006, b);

ii) il flusso annuo del risparmio finanziario delle famiglie italiane è risultato, nel 2004, pari a 83,2 miliardi di euro (Banca d'Italia 2006, b) e il loro risparmio complessivo, sempre nel 2004, era così investito (Banca d'Italia 2006, a): il 76,9% delle famiglie aveva un deposito bancario, il 18,8% un deposito postale, il 7,4% titoli di

[1] Si fa presente che il D. M. n. 775 del 31 gennaio 2006 con il quale era stato promosso un progetto, in ambito nazionale, concernente l'introduzione di innovazioni riguardanti gli ordinamenti liceali e l'articolazione dei relativi percorsi di studio, come dal decreto legislativo n. 226 del 2005, è stato sospeso con decreto ministeriale del 31 maggio 2006 n. 4018. In conseguenza le istituzioni scolastiche continuano ad adottare i piani di studio, gli orari, gli insegnamenti e le attività proprie degli ordini di studio vigenti, con l'esercizio delle facoltà previste dall'autonomia scolastica.

TABELLA 1

Disciplina scientifica	Contenuti informativi	Contenuti formativi
Matematica finanziaria	- Capitalizzazione e sconto. Principio di equivalenza finanziaria. Le rendite. - Costituzione e ammortamenti. Prestiti e rimborsi.	- Tradurre e rappresentare in modo formalizzato problemi finanziari.
Matematica attuariale	- Il concetto di gioco equo. - Tassi di sopravvivenza e tassi di mortalità. Speranze matematiche di pagamenti. Le basi concettuali delle assicurazioni.	- Impostare e risolvere problemi di matematica attuariale

Stato, l'11,9% obbligazioni e quote di fondi comuni e il 7,2% azioni e partecipazioni italiane, mentre la diffusione dei buoni postali fruttiferi nelle famiglie risultava minore (5,7%) e altre forme di risparmio riguardavano segmenti ancora più ridotti delle famiglie;

iii) le famiglie italiane erano indebitate, nel 2005, per un ammontare superiore ai 400 miliardi di euro (OSSERVATORIO ASSOFIN-CRIF-PROMETEIA 2006), così ripartiti: 18% per credito al consumo, 51,2% per mutui fondiari e 30,8% per altri motivi;

iv) la raccolta premi globale del lavoro diretto italiano relativo alle assicurazioni sulla vita risultava, nel 2005, pari a 73,5 miliardi di euro (ISVAP 2006);

v) a fronte di tutto ciò, tuttavia, la Banca d'Italia (BANCA D'ITALIA 2006, a) evidenziava che, nel 2004, per quanto concerne il grado di conoscenza finanziaria, quasi il 65% delle famiglie italiane non dedicava tempo a raccogliere informazioni utili a gestire i propri investimenti e solo il 2% dichiarava di impiegare oltre 4 ore alla settimana a tale scopo, facendo notare, altresì, che gran parte della differenza di comportamento risultava spiegabile dalla classe di reddito familiare e dal titolo di studio, che risultavano connessi positivamente con il tempo dedicato all'informazione finanziaria.

Una seconda e ultima motivazione l'ho tratta dal fatto che, come docente, prima dei *corsi di perfezionamento in didattica della matematica applicata*, organizzati dall'Università degli Studi di Roma – La Sapienza –, e poi dei *corsi abilitanti*, organizzati dalla SSIS del Lazio, ho potuto constatare che le persone che frequentano i corsi per acquisire l'abilitazione nella classe "A048 –Matematica applicata":

a) sono nella stragrande maggioranza laureati in matematica (così come è ragionevole pensare che lo siano anche gli insegnanti già di ruolo) che, non avendo già acquisito una conoscenza di livello universitario su queste materie, non padroneggiano, inizialmente, i concetti fondamentali su cui si basano le operazioni finanziarie;

b) sono generalmente molto motivati ad apprendere i concetti base di queste materie, in special modo coloro, e non sono pochi, i quali sono direttamente coinvolti in operazioni finanziarie reali.

Ciò premesso, va subito detto che prenderò in considerazione solamente la matematica finanziaria e la matematica attuariale, cioè, tralasciando di considerare la *ricerca operativa* ed utilizzando solo quegli aspetti della *statistica* e della *probabilità* che sono strettamente necessari per il discorso che mi accingo a sviluppare, ragionerò solo su una parte di quella che viene comunemente indicata come la *matematica applicata*.

Prima di concludere questa introduzione, ritengo necessario, infine, i) fare alcune precisazioni, ii) indicare il concetto chiave che intendo evidenziare e iii) dichiarare gli obiettivi (il messaggio *politico*)che intend o perseguire (trasmettere).

Le precisazioni sono le seguenti:

a) la matematica finanziaria che continua a rientrare negli obiettivi ministeriali è quella classica, in quanto le operazioni finanziarie considerate sono solo quelle certe o *classiche*, ossia non vengono ancora prese in considerazione quelle che sono state pensate e introdotte dopo il famoso articolo di Black e Scholes del 1973, basilare per il successo dell'ingegneria finanziaria;

b) la matematica applicata alle assicurazioni sulla vita rappresenta solo una parte della matematica attuariale e le assicurazioni sulla vita, che sono ancora le sole che rientrano negli obiettivi ministeriali, sono solo quelle *classiche*, ossia non vengono ancora prese in considerazione quelle *moderne* (indicizzate, adeguabili, unit-linked, equity-linked, etcc.);

c) le scelte ministeriali indicate nei punti a) e b) sono, tuttavia, compatibili con la necessità di limitare l'estensione del discorso solo a quei concetti che sono adeguati al livello della didattica che può essere sviluppata nella scuola secondaria superiore;

d) gli strumenti finanziari e le forme assicurative sulla vita, nelle loro versioni moderne, sono, infatti, molto più complicati di quelli che la scuola secondaria si propone di insegnare.

Il contenuto concettuale che intendo riproporre ed evidenziare in questo articolo, in forma didatticamente compatta e riducendo il contenuto informativo all'essenziale, è, essenzialmente, la stretta interconnessione esistente tra la matematica finanziaria classica e quella applicata alle assicurazioni sulla vita classiche. Essa trae la sua origine dal fatto che sono entrambe applicate alle operazioni finanziarie, la prima a quelle certe e la seconda a quelle aleatorie.

Infine, il messaggio politico-culturale che intendo trasmettere è triplice:

a) rimarcare la notevole importanza pratica della conoscenza delle problematiche da cui trae origine la necessità di utilizzare le operazioni finanziarie;

b) stimolare la scuola secondaria superiore a farsi carico almeno di una più estesa e più puntuale divulgazione delle nozioni *classiche*, per consentire a gran parte della popolazione italiana di non essere più molto impreparata, e quindi indifesa, nel momento in cui si trova a gestire le sue risorse finanziarie o a programmare scelte di tipo previdenziale;

c) proporre l'estensione dell'insegnamento della *matematica delle operazioni finanziarie (certe e aleatorie)* anche ad altri tipi di scuole secondarie di secondo grado.

La matematica applicata

Per impostare correttamente la didattica relativa all'insieme di materie indicato con l'espressione *matematica applicata* occorre tenere presenti due considerazioni di ordine generale. Esse sono:

a) la matematica applicata è un insieme concettuale composito, in quanto i suoi elementi appartengono sia alla *matematica* che a *ciò* a cui viene applicata;

b) non risulta specificato in tale espressione se la matematica utilizzata è stata pensata e, quindi, introdotta per affrontare i problemi in questione oppure se è solo una parte della matematica preesistente che bene si adatta a risolverli.

La prima considerazione induce fatalmente il seguente quesito: "quali pesi didattici devono essere assegnati a ciascuno dei due sottoinsiemi?"

Per poter rispondere in modo razionale a questa domanda risulta necessario riflettere sulla seconda considerazione. A tal fine saranno utili un paio di considerazioni attinenti al nostro discorso particolare.

La teoria della probabilità (il primo testo importante fu, come noto, *l'Ars conjectandi* di J. Bernoulli pubblicato postumo nel 1713) è stata pensata ed introdotta per valutare inizialmente il comportamento migliore da adottare sui tavoli da gioco, poi le situazioni che non era possibile valutare sfruttando il binomio causa-effetto ed, infine, è entrata a far parte a tutti gli effetti della matematica solo quando, nei primi decenni del secolo scorso, Bernstein e Kolmogorov, con approcci diversi, hanno portato a compimento la sua costruzione assiomatica. Il contenuto matematico adottato per la risoluzione dei problemi legati alle operazioni finanziarie certe, invece, non è stato pensato per questo fine e non costituisce un capitolo a sé della matematica.

Dunque, quando si prende in esame una operazione finanziaria aleatoria, l'attenzione, in genere, va concentrata prevalentemente sull'analisi della situazione aleatoria (il ruolo concettuale prevalente è svolto dalla *matematica*), mentre, quando si prende in esame una operazione finanziaria certa, il ruolo concettuale prevalente è svolto dal tipo di accordo che interviene tra le controparti che stipulano il contratto (il contenuto principale è *ciò* a cui la matematica viene applicata).

Queste ultime affermazioni, tuttavia, non devono indurre a pensare che l'aspetto non prevalente debba essere trascurato: è fondamentale, al contrario, che l'insegnamento, nella scuola secondaria superiore, delle operazioni finanziarie, certe o aleatorie che siano, evidenzi sia gli aspetti matematici sia il contenuto contrattuale specifico che ne sono alla base. I pesi didattici da assegnare ai due aspetti, a mio modo di vedere, devono essere autonomamente stabiliti dal docente in funzione del discorso culturale che intende sviluppare.

Concentrando, infine, il discorso solo sulla matematica delle operazioni finanziarie certe e aleatorie, occorre, come già evidenziato, tenere presente un'ulteriore considerazione e cioè l'interconnessione esistente tra la matematica delle operazioni finanziarie classiche e la matematica applicata alle assicurazioni sulla vita classiche.

Tale interconnessione è già presente nella definizione generale delle operazioni finanziarie proposta da de Finetti (1956).

Le operazioni finanziarie, considerate nella loro accezione più larga possibile, sono contratti di scambio in cui non figura nessuna merce fuorché il denaro.

In tale senso larghissimo, infatti, anche i contratti di assicurazione rientrano tra le operazioni finanziarie.

Per far emergere ancora più chiaramente la connessione, basta evidenziare, ulteriormente, che la matematica finanziaria relativa alle operazioni finanziarie certe e la matematica applicata alle assicurazioni sulla vita classiche:

a) consentono entrambe di analizzare le modalità con le quali è possibile, coinvolgendo almeno un altro soggetto, avere a disposizione, in tempi futuri prestabiliti o aleatori, importi monetari certi o aleatori di entità prefissata;

b) differiscono "tecnicamente" tra loro essenzialmente per il fatto che nella seconda devono essere presi in considerazione anche aspetti probabilistici.

Fondamentale per entrambe è la conoscenza delle regole che vengono adottate quando si procede all'effettuazione di uno scambio intertemporale di denaro tra almeno due soggetti.

Il punto di partenza per affrontare questi insegnamenti è, dunque, la comprensione del significato del termine "denaro" e del ruolo che esso svolge.

Il denaro

Il vocabolo denaro deriva dal latino *denarius* con cui si indicava una moneta d'argento del valore di 10 *assi* o di 2,5 *sesterzi*. In lingua inglese si utilizza il vocabolo *money* che deriva dal nome della dea romana Giunone Moneta.

Il vocabolo moneta, invece, deriva dal verbo latino *monere*, ossia ammonire.

I due vocaboli, denaro e moneta, sono sinonimi e stanno ad indicare genericamente "ciò che viene accettato come mezzo per acquistare un bene o un servizio o per saldare un debito".

Prima dell'introduzione del denaro, gli scambi di beni e/o servizi venivano regolati per mezzo del *baratto*, ossia beni e/o servizi venivano scambiati con beni e/o servizi considerati equivalenti. Questo modo di operare, tuttavia, presenta il notevole svantaggio, per chi lo pratica, di dover trovare, volta per volta, un accordo con la controparte.

L'introduzione delle prime monete in metalli pregiati ha consentito l'introduzione del concetto di *prezzo* basato sul *peso* del metallo pregiato in esse contenuto. Questo modo di operare è ancora, a ben vedere, un baratto; il passo in avanti, infatti, consiste solo nell'introduzione di una *merce di scambio* di riferimento sulla quale misurare l'equivalenza.

Nelle economie moderne i metalli pregiati sono stati sostituiti da banconote e monete il cui valore effettivo è del tutto irrilevante ma che sono garantite da banche e governi. Questo denaro *ufficiale* è anche detto denaro *contante*. Esso può essere sostituito dall'uso di assegni bancari, cambiali, carte di credito, etc.

Attualmente il denaro è, dunque, divenuto una *convenzione*, basata sulla *fiducia* nei confronti di una *istituzione* e sul fatto che tutti i soggetti appartenenti ad una stessa area geo-politica accettano l'uso di una stessa unità monetaria.

Il denaro, in tutte le sue forme consentite e accettate, è, infatti, sempre espresso in multipli e sottomultipli di una unità monetaria avente valore legale (euro, dollaro statunitense, yen, yuan, etc.).

Un importo monetario C si può, pertanto, esprimere come il prodotto:

$$C = cU, \tag{1}$$

dove:

c = numero puro che rappresenta l'ammontare numerico dell'importo monetario,
U = unità monetaria.

Il denaro, come qualsiasi bene o servizio, può essere scambiato e tale scambio risulta essere non banale solo se si realizza in tempi diversi tra almeno due soggetti diversi. La società in cui viviamo accetta, generalmente, il seguente *postulato del rendimento del denaro*, che può essere espresso tramite le due seguenti proposizioni che si integrano tra loro.

Non è possibile garantirsi il possesso di un importo monetario a costo nullo o negativo.

Il prezzo di un'operazione che consiste nel differire il termine di un credito (o anticipare quella di un debito) è negativo (inversamente, quindi, per anticipare il termine di un credito (o differire quello di un debito) il prezzo è positivo).

La matematica finanziaria classica e la matematica applicata alle assicurazioni sulla vita classiche si basano essenzialmente su questo postulato. Va detto, tuttavia, che il postulato del rendimento del denaro trae la sua origine e, quindi, giustificazione più da un dato di fatto di ordine storico piuttosto che da una necessità logica. Nella ipotetica situazione economica in cui nessuno o pochissimi avessero bisogno di denaro a prestito, non risulterebbe conveniente, infatti, accettare un importo monetario impegnandosi a restituirlo, successivamente, aumentato, bensì risulterebbe conveniente restituirlo, successivamente, diminuito, per tener conto del servizio reso con la sua custodia.

Va detto, altresì, che tale postulato non viene preso in considerazione nei Paesi che si attengono strettamente ai precetti della religione islamica. Il Corano, infatti, quando parla di denaro dice, in quattro punti diversi, che è proibito riconoscere e ricevere la *riba*, termine unico usato per indicare sia l'usura che il tasso d'interesse. La riba è proibita perché secondo il pensiero islamico non si può ottenere un guadagno deciso a priori e senza rischio.

Tutto ciò premesso, vedremo più avanti come il postulato del rendimento del denaro, quando viene accettato, consente di regolare gli scambi di denaro e, quindi, in definitiva, le operazioni finanziarie.

Le operazioni finanziarie

Un'operazione finanziaria è, in estrema sintesi, il mezzo che ci consente o di anticipare il momento in cui si può avere a disposizione un importo monetario oppure di averne il possesso in un'epoca futura. Per comprendere il ruolo sociale svolto dalle operazioni finanziarie di cui ci stiamo interessando bisogna tener conto delle due seguenti considerazioni.

Dal punto di vista finanziario, ci sono momenti della vita in cui ci occorre più denaro di quanto ne abbiamo ed altri in cui abbiamo più denaro di quanto ce ne occorre. Queste due situazioni, e soprattutto la prima, non sono, ovviamente, situazioni ottimali, in quanto la mancanza di denaro comporta privazioni e il mancato utilizzo dello stesso, oltre a far perdere un guadagno potenziale, ne diminuisce, a causa del processo inflatorio, il reale potere d'acquisto. Dunque, la situazione teorica ottimale è quella in cui, in ogni circostanza, si ha "a disposizione" solo il denaro strettamente sufficiente per le proprie necessità.

Dal punto di vista assicurativo, va considerato che la fonte di sostentamento di un individuo nel corso della sua vita, prendendo in considerazione un esempio semplificato al massimo, varia, generalmente, tre volte. Indicando con $t = 0$ il momento della sua nascita, con $t = \tau$ il momento in cui, avendo intrapreso un'attività lavorativa, incassa il suo primo denaro e con $t = \vartheta$ il momento in cui cessa definitivamente di lavorare, il nostro individuo non è in grado di acquisire personalmente denaro sia nell'intervallo temporale $[0, \tau)$ che nell'intervallo $[\vartheta, \omega)$, dove con ω è stata indicata l'età massima (finita) che può raggiungere in vita. Egli, tuttavia, ha bisogno di denaro durante tutta la sua vita. Il denaro di cui ha bisogno nel primo periodo gli viene messo a disposizione, in genere, dai genitori, ma il denaro che gli serve nel terzo periodo lo deve trasferire dal secondo, ossia dal periodo $[\tau, \vartheta)$, costituendo una posizione di rendita.

Ciò premesso, cominciamo con l'esaminare, nelle loro linee essenziali, le operazioni finanziarie di cui ci vogliamo occupare.

Le operazioni finanziarie certe (classiche), se ci limitiamo a considerare le più semplici, possono essere o operazioni di indebitamento (o provvista) o operazioni di investimento (o impiego). Le prime consentono ad un soggetto di avere in prestito da un altro soggetto il denaro di cui ha bisogno (con l'impegno di restituirlo, complessivamente aumentato, in una o più date future), mentre le seconde consentono ad un soggetto di dare in prestito ad un altro soggetto il denaro di cui non ha bisogno (con l'impegno di quest'ultimo a restituirlo, complessivamente aumentato, in una o più date future).

Le operazioni finanziarie aleatorie (nel nostro caso, le assicurazioni sulla vita classiche) possono assumere diversi gradi di aleatorietà. In un contratto di assicurazione sulla vita figurano, oltre all'assicuratore, anche:

a) il *contraente*, che stipula il contratto e paga il premio (o i premi);

b) l'*assicurato* (o gli assicurati), cui si riferiscono gli eventi oggetto dell'assicurazione;

c) il *beneficiario* (o i beneficiari), cui vengono (eventualmente) pagate le somme assicurate.

Il contraente, l'assicurato e il beneficiario possono essere la stessa persona oppure due o tre persone diverse.

Un contratto di assicurazione sulla vita, nella sua versione classica, consente al contraente di mettere a disposizione dei(del) beneficiari(o), per mezzo di una compagnia di assicurazioni, in un istante futuro, determinato o meno, l'importo monetario che ritiene per essi(lui) necessario, nel caso in cui si realizzi un preciso evento riguardante la vita (sopravvivenza o morte) dell'assicurato (l'assicuratore è tenuto, infatti, a fronte del pagamento di un premio di assicurazione, unico o rateizzato, a pagare l'importo monetario stabilito se, al tempo o nell'intervallo di tempo stabilito, l'evento riguardante la vita dell'assicurato si è effettivamente realizzato).

A conclusione del discorso, esaminiamo, infine, alcuni esempi pratici di operazioni finanziarie, che non intendono assolutamente esaurire la gamma delle possibilità concrete, ma solo rappresentarne un campione indicativo.

A. *Costituzione di un capitale*

Un individuo A lavora ed ha la possibilità di risparmiare 2.000 euro al mese.

Se alla fine di ogni mese A mette da parte i 2.000 euro, allora egli avrà la disponibilità di 200.000 euro dopo 100 mesi (8 anni e 4 mesi).

Se, invece, A deposita ogni mese 2.000 euro in un conto corrente bancario, vincolato per il periodo necessario, che gli produce interessi, allora egli riuscirà ad accumulare i 200.000 euro con meno di 100 versamenti mensili di 2.000 euro e, dunque, in un tempo t che in genere risulta inferiore agli 8 anni e 4 mesi, e questo tempo t risulterà tanto più breve quanto più alto è il tasso d'interesse che la banca gli corrisponde.

B. *Acquisto di un appartamento*

Lo stesso individuo A vuole acquistare un appartamento che costa 200.000 euro.

Egli, se adotta la seconda strategia per la costituzione del capitale e il prezzo dell'appartamento non varia nel tempo, può, dunque, acquistarlo al tempo t.

Se, invece, lo vuole acquistare subito, può farlo, chiedendo in prestito alla banca i 200.000 euro ed impegnandosi a rimborsare il prestito ricevuto con rate mensili di 2.000 euro. Ora, ovviamente, l'acquisto dell'appartamento gli costerà complessivamente più di 200.000 euro, perché alla banca, oltre a restituire i 200.000 euro, dovrà pagare anche gli interessi e, pertanto, impiegherà quasi sicuramente più di 8 anni e 4 mesi a rimborsare il prestito.

C. *Stipula di un contratto di assicurazione temporanea caso morte*

Questa forma di assicurazione caso morte risulta opportuna nel caso in cui, ad esempio, un genitore,

che ha uno o più figli "piccoli" e il coniuge che non lavora, voglia evitare che la sua famiglia si trovi in gravi ristrettezze economiche in caso di una sua morte prematura. Stipulando tale tipo di polizza, infatti, nel caso in cui abbia a decedere nell'intervallo temporale previsto nella polizza, egli garantisce ai beneficiari il capitale pattuito nella polizza.

D. *Stipula di un contratto di assicurazione di rendita vitalizia*

Questa forma di assicurazione caso vita risulta opportuna nel caso in cui, ad esempio, un individuo che lavora guadagna più di quanto gli sia necessario. Stipulando tale tipo di polizza, infatti, nel caso in cui raggiunga in vita una certa età, egli si garantisce, da quel momento in poi, una rendita vitalizia, ossia una rendita che si interrompe solo con la sua morte.

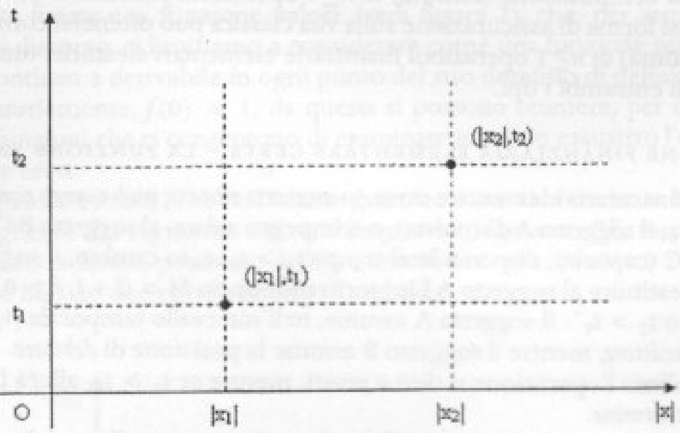

FIGURA 1

LE OPERAZIONI FINANZIARIE ELEMENTARI

Nella sua forma più semplice, che possiamo chiamare *elementare*, un'operazione finanziaria non banale, basata sul postulato del rendimento del denaro, è costituita dallo scambio, tra due soggetti A e B, di due importi monetari x_1 e $x_2 > x_1$ da effettuare, rispettivamente, nei tempi t_1 e $t_2 > t_1$. Dunque, essa può essere sintetizzata dall'insieme delle due coppie (x_1, t_1) e (x_2, t_2), come viene mostrato in figura 1. I due importi monetari x_1 e x_2, che in FIGURA 1 sono riportati in valore assoluto, debbono necessariamente risultare, per ciascuno dei due soggetti, di segno opposto, in quanto se A riceve (dà) il primo da (a) B, allora, necessariamente, B deve ricevere (dare) il secondo da (a) A. Se così non fosse, allora non sarebbe corretto parlare di operazione finanziaria, ma si dovrebbe parlare di due elargizioni di A (B) a B (A).

Se le quattro grandezze x_1, x_2, t_1 e t_2 sono tutte espresse tramite numeri certi, allora l'operazione si dice *certa*, mentre se almeno una di esse è espressa tramite un numero aleatorio (o variabile aleatoria), allora l'operazione si dice *aleatoria*.

Esiste un solo tipo di operazione finanziaria elementare certa e, circoscrivendo il discorso alle sole assicurazioni sulla vita classiche, due soli tipi di operazione finanziaria elementare aleatoria.

Possiamo dire, in modo grossolano, che l'operazione finanziaria elementare certa racchiude in sé la maggior parte del contenuto informativo associato alle operazioni finanziarie certe e poco meno del 50% del contenuto informativo associato alle operazioni finanziarie aleatorie, in quanto queste ultime possono essere ben comprese solo quando si abbia una buona conoscenza anche del concetto di variabile aleatoria.

La grande rilevanza che va attribuita alle tre operazioni finanziarie elementari succitate consegue dal fatto che qualsiasi operazione finanziaria certa si può ottenere come una composizione (somma) di $n \geq 1$ operazioni finanziarie elementari certe e qualsiasi forma di assicurazione sulla vita classica può ottenersi come composizione (somma) di $n \geq 1$ operazioni finanziarie elementari aleatorie, tutte dello stesso tipo o di entrambi i tipi.

L'operazione finanziaria elementare certa – la funzione valore

L'operazione finanziaria elementare certa, in estrema sintesi, può essere così espressa: "al tempo t_0, il soggetto A dà (presta), o si impegna a dare, al soggetto B l'importo monetario C (capitale), disponibile al tempo $t_1 > t_0$, e, in cambio, il soggetto B si impegna a restituire al soggetto A l'importo monetario $M = C + I$, $I > 0$, (montante) al tempo $t_2 > t_1$". Il soggetto A assume, nell'intervallo temporale $[t_1, t_2)$, la posizione di *creditore*, mentre il soggetto B assume la posizione di *debitore*.

Se $t_1 = t_0$, allora l'operazione si dice *a pronti*, mentre se $t_1 > t_0$, allora l'operazione si dice *a termine*.

Se l'operazione non può essere modificata dopo il tempo t_0, allora si dice *rigida*, in caso contrario si dice *elastica*.

Per evidenziare il suo contenuto matematico, è necessario cominciare col dare una risposta alla seguente domanda: "quale è la relazione matematica che deve legare tra loro le quattro variabili C, M, t_1 e t_2?"

Poiché consideriamo accettato il postulato del rendimento del denaro, possiamo rispondere alla domanda nel modo seguente: "il montante deve essere espresso tramite una funzione matematica delle variabili indipendenti C, t_0, t_1 e t_2, che deve risultare monotona strettamente crescente al crescere sia della variabile indipendente $(t_2 - t_1)$ che della variabile indipendente C".

Le quattro variabili temporali t_0, t_1, t_2 e $(t_2 - t_1)$ indicano, rispettivamente, la data di stipula del contratto, la data dell'inizio dell'operazione, la data della fine dell'operazione e la durata della operazione.

Il caso particolare e puramente teorico in cui la succitata funzione dipende solo dalle variabili indipendenti C e $(t_2 - t_1)$ si presta bene, ponendo l'ulteriore condizione semplificativa che, per $(t_2 - t_1)$ costante, M risulta direttamente proporzionale a C, ad essere adottato, su un piano strettamente didattico, nelle scuole secondarie superiori. Infatti, in questo caso, per ogni valore di C prefissato, $C = C_0$, $C_0 > 0$, la relazione matematica è espressa tramite la funzione matematica monotona crescente di una sola variabile indipendente, nota come *legge di equivalenza intertemporale*:

$$M(t_2 - t_1) = C_0 f(t_2 - t_1), \tag{2}$$

dove la funzione $f(t_2 - t_1)$ è nota, a sua volta, come *funzione valore*. La funzione valore è lo strumento che ci consente, una volta che siano note tre delle quattro grandezze che figurano nell'operazione finanziaria elementare certa, di determinare in modo univoco la quarta. Essa, che in linea teorica può essere scelta in infiniti modi diversi, ci consente, in particolare, di determinare, fissato $C = 1$, come varia $M(t_2 - t_1)$ al variare dell'intervallo temporale $(t_2 - t_1)$, ovvero, posto $t_1 = 0$ e $t_2 = \tau$, come varia $M(\tau)$ al variare di τ. Nella pratica, per motivi concettuali, ma anche di semplicità, la funzione valore viene scelta, generalmente, o esponenziale o lineare o iperbolica.

Una volta fissata una funzione valore (vedi figura 2), che, per semplificare al massimo il discorso, ci limitiamo a considerare come una funzione reale, a valori positivi, continua e derivabile in ogni punto del suo dominio di definizione e tale che, necessariamente, $f(0) = 1$, da questa si possono ottenere, per ogni istante $t > 0$, sei funzioni che ci consentono di esaminare in modo esaustivo l'operazione elementare certa.

Osservando la Figura 2, in cui l'istante generico è stato indicato con τ, preso atto che la lunghezza del segmento DE, e, dunque, del segmento BE, varia al variare dell'istante considerato, possiamo definire, infatti, per ogni istante $t > 0$, indicando con $DE(t)$ e $BE(t)$ le due corrispondenti lunghezze,

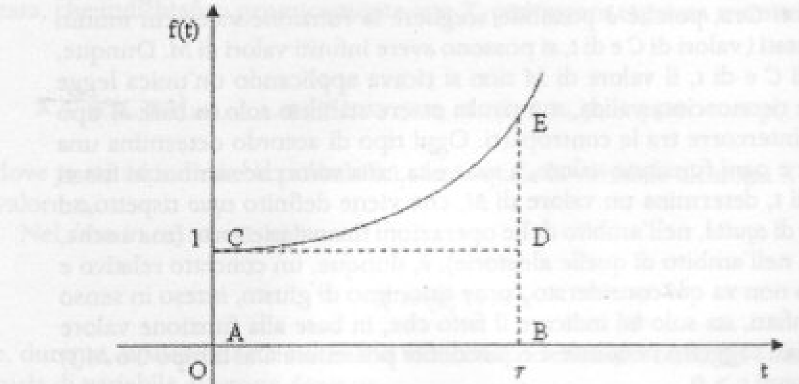

Figura 2

le sei funzioni suddette nel modo seguente:

1) $I(t) = DE(t) = M(t) - 1$ =interesse maturato nell'intervallo temporale $[0, t]$;

2) $m(t) = BE(t)/AC = M(t)/1$ = fattore di capitalizzazione nell'intervallo temporale $[0, t]$;

3) $v(t) = AC/BE(t) = 1/M(t)$ = fattore di sconto nell'intervallo temporale $[0, t]$;

4) $i(t) = DE(t)/AC = I(t)/1$ = tasso di interesse (o di rendimento) nell'intervallo temporale $[0, t]$;

5) $s(t) = DE(t)/BE(t) = I(t)/M(t)$ = tasso di sconto (o d'interesse anticipato) nell'intervallo temporale $[0, t]$;

6) $\delta(t) = (d/dt)f(t)$ = intensità istantanea di interesse o di sconto (o forza di interesse o di sconto) in t.

Come è facile verificare, ciascuna di queste sei funzioni può essere espressa tramite ciascuna delle altre cinque. Le dimensioni associate ai loro valori numerici sono le seguenti:

a) importo monetario: I;

b) numero puro: m, v, i, s;

c) inverso di un tempo: δ.

La relazione fondamentale tra il montante, il capitale e la durata dell'operazione finanziaria elementare, ponendo ora $t_1 = 0$ e $(t_2 - t_1) = t$, dipende dalla scelta della funzione valore e, fissato C, può essere espressa in funzione di ciascuna delle sei precedenti funzioni. In particolare, ad esempio, si ha:

$$\begin{aligned} &\bullet M(t) = C(1 + i(1))^t, \text{ per la legge di equivalenza intertemporale } \textit{esponenziale};\\ &\bullet M(t) = C(1 + i(1)t), \text{ per la legge di equivalenza intertemporale } \textit{lineare}; \qquad (3)\\ &\bullet M(t) = C[1/(1 - s(t))], \text{ per la legge di equivalenza intertemporale } \textit{iperbolica}. \end{aligned}$$

Da queste relazioni matematiche risulta subito evidente come sia possibile avere, semplicemente variando la funzione valore, differenti valori di M per gli stessi valori di C e di t. Ora, poiché è possibile scegliere la funzione valore in infiniti modi diversi, fissati i valori di C e di t, si possono avere infiniti valori di M. Dunque, fissati i valori di C e di t, il valore di M non si ricava applicando un'unica legge oggettivamente riconosciuta valida, ma risulta essere stabilito solo in base al tipo di accordo che intercorre tra le controparti. Ogni tipo di accordo determina una funzione valore e ogni funzione valore, a sua volta, una volta che siano stati fissati i valori di C e di t, determina un valore di M, che viene definito *equo* rispetto ad essa. Il concetto di *equità*, nell'ambito delle operazioni finanziarie certe (ma anche, come vedremo, nell'ambito di quelle aleatorie), è, dunque, un concetto relativo e l'aggettivo equo non va qui considerato come sinonimo di giusto, inteso in senso morale. Esso, infatti, sta solo ad indicare il fatto che, in base alla funzione valore scelta, per qualsiasi soggetto razionale è equivalente possedere C al tempo 0 o $M(t)$ al tempo t, per ogni $t > 0$.

La funzione valore, dunque, fornisce, fissata la legge di equivalenza intertemporale, l'insieme delle coppie (importo monetario, istante temporale) che risultano equivalenti alla coppia $(C = 1, t = 0)$.

Una volta che sia stata ben compresa l'operazione finanziaria elementare certa, può essere facilmente valutata qualsiasi altra operazione finanziaria certa, che indichiamo, genericamente, con:

$$O = \{(x_h, t_h)\}_{h=1,2,\ldots,n}, \, n > 2, \tag{4}$$

dove x_h sta ad indicare il generico importo monetario esigibile al tempo t_h e gli n importi monetari non possono essere tutti dello stesso segno algebrico.

Infatti, l'operazione O, in cui figurano $n > 2$ importi monetari e tempi e, quindi, può essere considerata come un insieme di n coppie (x_h, t_h), si può ottenere, ad esempio, come somma delle $n - 1$ operazioni elementari, sottoposte alla sua stessa legge di equivalenza intertemporale:

$$O_h = \{(y_h, t_1), (x_{h+1}, t_{h+1})\}, \, h = 1, 2, \ldots, n - 1, \tag{5}$$

sotto la condizione che risulti:

$$x_1 = y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}. \tag{6}$$

Allo stesso risultato si può arrivare utilizzando qualsiasi altro degli $n-1$ insiemi di $n-1$ operazioni elementari certe che si può costruire, in modo analogo, a partire dall'insieme O, cambiando l'istante t_h di riferimento.

LE DUE OPERAZIONI FINANZIARIE ELEMENTARI ALEATORIE. LA FUNZIONE DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ

Poiché le assicurazioni sulla vita possono essere distinte, anche a livello elementare, in una assicurazione *caso vita* e in una assicurazione *caso morte*, dobbiamo considerare due operazioni finanziarie elementari aleatorie.

Per comprendere queste nuove operazioni finanziarie, occorre avere chiaro il concetto di *variabile aleatoria*. Una variabile aleatoria è, con parole semplici, una variabile che può assumere un insieme di valori, ciascuno dei quali con una certa probabilità. Nel caso particolare in cui l'insieme dei valori sia finito o numerabile, essa, che indichiamo genericamente con X, può essere espressa tramite la:

$$X = \{(x_h, p_h)\}_{h=1,2,\dots,n}, n \geq 1, x_1 < x_2 < \dots < x_n, p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1, \quad (7)$$

dove p_h sta ad indicare la probabilità con la quale la variabile aleatoria X assume il valore x_h.

Nel caso in cui $n = 1$, si ha:

$$X = (x, 1) = x \quad (8)$$

e, dunque, la variabile aleatoria X si riduce ad un numero certo. In questo caso si parla di variabile aleatoria *degenere*.

Il contenuto informativo della (7) può essere sintetizzato dalla cosiddetta *funzione distribuzione (di probabilità)*, che viene generalmente indicata con il simbolo F_X e che è definita tramite la:

$$F_X(x) = \text{Prob}\{X \leq x\}, -\infty < x < +\infty, \quad (9)$$

dove la scrittura $\text{Prob}\{X \leq x\}$ sta ad indicare la probabilità che la variabile aleatoria X possa assumere valori minori o uguali a x.

La funzione distribuzione è una funzione di variabile reale, monotona non decrescente e definita nell'insieme dei reali che assume valori nell'intervallo [0, 1].

Una sua generica rappresentazione grafica, relativa ad una variabile aleatoria del tipo (7), nel caso particolare in cui $n > 1$ e $x_1 > 0$, è riportata in Figura 3.

Poniamoci ora una domanda che la stragrande maggioranza delle persone si pone spesso quando si trova a fronteggiare una situazione aleatoria: "qual è il "miglior" numero certo che può sostituire un numero aleatorio?", ovvero: "qual è il numero certo che fornisce la migliore informazione circa una situazione aleatoria?".

La statistica risponde "consigliando" nella maggior parte dei casi, per motivi che non è possibile illustrare chiaramente in modo succinto, il *valore atteso* della variabile aleatoria, più noto, in genere, come il *valore medio* o la *media aritmetica*.

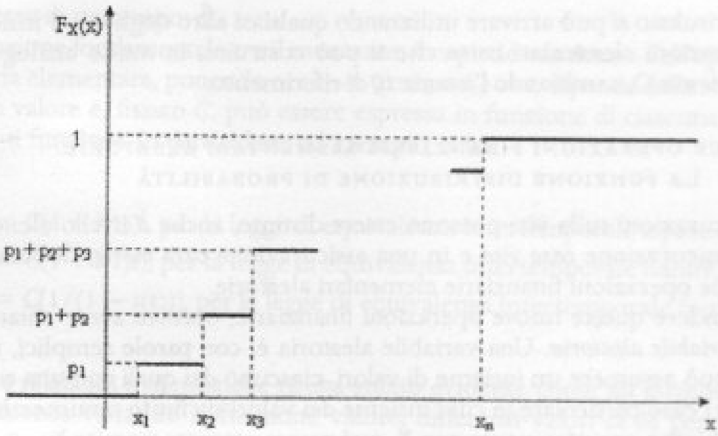

FIGURA 3

Nel caso particolare di una variabile aleatoria X del tipo espresso tramite la (7), il valore atteso, indicato con E[X], si ottiene tramite la:

$$E[X] = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \tag{10}$$

Non risulta necessario prendere in considerazione anche il caso in cui la variabile aleatoria assume valori nel continuo, perché in questo caso, in cui la funzione distribuzione gioca un ruolo centrale nella determinazione del valore atteso $E[X]$, occorre, ovviamente, sostituire le sommatorie con gli integrali e ciò potrebbe risultare troppo difficile da trattare nel triennio della scuola secondaria superiore.

Tutto ciò premesso, possiamo passare ad esaminare le due operazioni finanziarie elementari aleatorie, che vengono indicate, rispettivamente, con $O_{A(\text{vita})}$ e $O_{A(\text{morte})}$ per distinguerle da quella elementare certa.

Entrambe possono essere espresse tramite l'operazione finanziaria elementare aleatoria generalizzata:

$$O_A = \{(C, t_1), (\mathrm{M}, t_2)\} = \{(P, 0), (\mathrm{M}, \tau)\}, \tag{11}$$

dove P, che sostituisce C, sta ad indicare il premio *equo* che il contraente deve pagare all'assicuratore per stipulare il contratto di assicurazione (premio commerciale o di tariffa al netto del caricamento di sicurezza e dei caricamenti per le spese) e la variabile aleatoria M sta ad indicare l'impegno condizionato assunto (la somma assicurata) dall'assicuratore nei confronti del (dei) beneficiario (beneficiari).

Per semplificare al massimo la trattazione, è opportuno considerare il caso in cui la variabile aleatoria M è definita nel modo seguente:

$$\mathrm{M} = \{(0, p_1), (1, p_2)\}, \text{ con } p_1 + p_2 = 1, \tag{12}$$

ossia il caso in cui essa può assumere solo i valori 0 e 1 con probabilità rispettive p_1 e p_2, dove, ovviamente, $p_2 = 1 - p_1$.

$O_{A(\text{vita})}$ e $O_{A(\text{morte})}$ differiscono tra loro essenzialmente perché le probabilità p_1 e p_2, associate alle realizzazioni della variabile aleatoria M, risultano differenti, fissata la coppia (età d'ingresso dell'assicurato, durata del contratto di assicurazione), nei due tipi di assicurazione, come viene di seguito mostrato.

Nel caso dell'assicurazione caso vita, in cui l'assicuratore si impegna a pagare l'importo monetario unitario solo se l'assicurato è in vita al momento della scadenza della polizza, si ha, infatti:

$$p_1 = \text{Prob}\{\mathrm{T}_x \leq \tau\} = {}_{/\tau}q_x \text{ e } p_2 = \text{Prob}\{\mathrm{T}_x > \tau\} = {}_{\tau}p_x \tag{13}$$

dove:
x = età dell'assicurato al momento della stipula del contratto di assicurazione ($0 \leq x < \omega$);
τ = durata del contratto di assicurazione ($0 < \tau \leq \omega - x$);
ω = età estrema, che non è ben definita e, in genere, varia al variare del tempo e dello spazio, ma, comunque è finita;
T_x = variabile aleatoria *ulteriore durata in vita* di una persona (l'assicurato) che (al momento della stipula del contratto) ha l'età di x anni;
${}_{/\tau}q_x$ = probabilità, per una persona che ha l'età di x anni, di morire entro τ anni;
${}_{\tau}p_x$ = probabilità, per una persona che ha l'età di x anni, di morire dopo τ anni.

Nel caso dell'assicurazione caso morte, in cui l'assicuratore si impegna a pagare l'importo monetario unitario solo se l'assicurato muore nell'ultimo periodo unitario (anno) di validità della polizza, si ha, invece:

$$\begin{aligned} p_1 &= \text{Prob}\{\mathrm{T}_x \leq \tau - 1\} + \text{Prob}\{\mathrm{T}_x > \tau\} = {}_{/\tau-1}q_x + {}_{\tau}p_x \text{ e } p_2 = \\ &= \text{Prob}\{\tau - 1 < \mathrm{T}_x \leq \tau\} = {}_{\tau-1/1}q_x \end{aligned} \tag{14}$$

dove:
${}_{\tau-1/1}q_x$ = probabilità, per una persona che ha l'età di x anni, di morire nell'intervallo di età $(x + \tau - 1, x + \tau]$.

Nell'assicurazione elementare caso vita, dunque, l'assicuratore paga l'importo unitario al tempo τ solo se l'assicurato è ancora in vita, mentre, nell'assicurazione elementare caso morte, lo paga solo se l'assicurato muore nell'intervallo temporale $(\tau - 1, \tau]$.

A questo punto, per completare l'esame della (10), non resta che stabilire l'entità del premio P che deve essere corrisposto all'assicuratore al tempo $t = 0$.

Tenuto conto che le probabilità p_1 e p_2, definite tramite le (12) e (13), dipendono, in entrambi i casi, come è facile constatare, dall'età x dell'assicurato al momento della stipula del contratto e dalla durata τ del contratto di assicurazione, il valore numerico da associare a P si ottiene considerando la seguente operazione finanziaria elementare certa:

$$O = \{(P, 0), (E[\mathrm{M}]_{x,\tau}, \tau)\}, \tag{15}$$

dove:

$$E[\mathrm{M}]_{x,\tau} = p_1(x,\tau)0 + p_2(x,\tau)1 = p_2(x,\tau), \text{con} 0 < p_2(x,\tau) < 1 \qquad (16)$$

e, pertanto, nel caso, generalmente usato nella pratica, in cui viene adottata la legge di equivalenza intertemporale esponenziale, si ha:

$$P = E[\mathrm{M}]_{x,\tau}/(1+i(1))^{\tau} = E[\mathrm{M}]_{x,\tau}v^{\tau}. \qquad (17)$$

Confrontando la (16) con la prima delle (3), dalla quale risulta che, per $M = 1$ al tempo t, deve essere $C = 1/(1+i(1))^t = v^t$ al tempo 0, si può comprendere facilmente il ruolo svolto dal fattore $E[\mathrm{M}]_{x,\tau} < 1$. Esso, che rappresenta l'unico elemento nuovo da introdurre quando si passa dall'operazione finanziaria elementare certa all'operazione finanziaria elementare aleatoria generalizzata, riduce l'importo monetario da scambiare al tempo 0. Tale riduzione è giustificata dal fatto che la somma unitaria prevista al tempo t non è più esigibile con certezza.

Prima di concludere questo paragrafo, resta ancora da chiarire, per simmetria con il precedente, se e in che modo si può parlare di operazione finanziaria elementare aleatoria equa, tenuto conto che ora non basta più considerare solo la coppia (importo monetario, istante temporale), ma occorre considerare anche la probabilità associata all'acquisizione dell'importo monetario.

Un'operazione finanziaria elementare aleatoria O_A, per quanto fin qui detto, risulta essere costruita utilizzando i) la funzione valore scelta, ii) la funzione distribuzione (di probabilità) della variabile aleatoria T_x e iii) il valore medio come importo certo "equivalente" al valore aleatorio dell'impegno a risarcire assunto dall'assicuratore.

Dato per definitivamente "assimilato" il contenuto del punto iii), per qualsiasi soggetto razionale, al tempo $t = 0$, è equivalente possedere $P = E[\mathrm{M}]_{x,\tau}v^{\tau}$ al tempo $t = 0$ o M al tempo $t = \tau$.

Ma non si può dire altrettanto al tempo $t = \tau$, quando si sa quanto l'assicuratore deve corrispondere al beneficiario, ossia 0 o 1, e lo si confronta con il montante del premio, che al tempo τ vale $p_2(x,\tau)$.

Dunque, un'operazione finanziaria elementare aleatoria O_A risulta essere equa solo a priori, quando lo scenario è aleatorio ed ha senso associare ad una variabile aleatoria il suo valore atteso, e, più precisamente, solo al momento della stipula del contratto assicurativo ($t = 0$). Al momento in cui si conclude il contratto assicurativo ($t = \tau$), cioè a posteriori, invece, il valore atteso della variabile aleatoria non coincide, per la (15), con la sua realizzazione. Tuttavia, a posteriori, ma solo per l'assicuratore e a certe condizioni, un'operazione finanziaria elementare aleatoria O_A può risultare equa in "media". Più precisamente, l'assicuratore, al tempo τ, se, e solo se:

a) ha stipulato, al tempo $t = 0$, un numero molto elevato (o meglio, che tende a infinito) di contratti, ciascuno su un assicurato diverso,

b) la probabilità (assoluta o incondizionata) di sopravvivenza (o di morte) di ciascun assicurato coincide con tutte quelle che sono subordinate o alla sopravvivenza o alla morte di ciascuno degli altri assicurati,

ha, dal punto di vista teorico, una probabilità che tende a 1 di dover risarcire un importo complessivo pari al montante finanziario certo dell'ammontare complessivo dei premi equi incassati.

Per la coppia contraente-beneficiario, invece, un'assicurazione elementare sulla vita risulta essere sempre, a posteriori e dal punto di vista finanziario, una operazione o vantaggiosa o svantaggiosa. Ma, dal punto di vista previdenziale, un'assicurazione elementare sulla vita risulta essere sempre vantaggiosa per la coppia contraente-beneficiario. Ciò è dovuto al fatto che, nel caso in cui si verifica l'evento temuto, il beneficiario viene a ricevere dall'assicuratore un importo monetario superiore a quello che potrebbe ottenere capitalizzando il premio P, pagato dal contraente, per la stessa durata e allo stesso tasso annuo d'interesse.

Poiché, rispetto alla sua legge di equivalenza intertemporale, una operazione finanziaria elementare certa risulta equa, come è stato già evidenziato, in qualunque istante di valutazione compreso nell'intervallo temporale $[0, \infty)$, il concetto di equità pone in evidenza una differenza sostanziale tra l'operazione finanziaria elementare certa e le operazioni finanziarie elementari aleatorie.

Bibliografia

Banca d'Italia (2006, a), I bilanci delle famiglie italiane nell'anno 2004. *Supplementi al Bollettino Statistico – Indagini campionarie*, Anno xvi, No. 7, 17 gennaio 2006.

Banca d'Italia (2006, b), *Assemblea generale ordinaria dei partecipanti – Anno 2005*, Bozze di stampa, 31 maggio 2006.

F. Black e M. Scholes (1973), The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-654.

B. de Finetti (1935), Sulle operazioni finanziarie. *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, n. 4, pp. 3-16.

B. de Finetti (1956), *Lezioni di matematica finanziaria*, Roma, Ed. Ricerche.

J. C. Hull (2002), *Opzioni, futures e altri derivati*, Prentice-Hall InternationalIl Sole 24 ore.

isvap (2006), *Premi contabilizzati a tutto il quarto trimestre 2005 dalle Imprese di assicurazione nazionali e dalle Rappresentanze generali per l'Italia delle Imprese di assicurazione estere*, Roma, 28 aprile 2006.

Osservatorio Assofin-Crif-Prometeia (2006), *Ventesimo rapporto sul credito al dettaglio.*

E. Pitacco (2000), *Matematica e tecnica attuariale delle assicurazioni sulla durata di vita*, Trieste, Ed. lint.