APPUNTI

del

CORSO sulla DIDATTICA DELLA MATEMATICA APPLICATA - FINANZIARIA

tenuto dal Prof.

AUGUSTO FREDDI

aprile - maggio 2002

PROGRAMMA DI MATEMATICA FINANZIARIA

Prof. Augusto FREDDI

a.a. 2001/2002

1 - Il postulato del rendimento del denaro.

2 - Le operazioni finanziarie elementari: i titoli a cedola nulla.

3 - Il principio di equivalenza intertemporale tra gli importi monetari.

4 - Le principali leggi di equivalenza intertemporale tra gli importi monetari.

5 - Le operazioni finanziarie composte: le rendite, i piani d'ammortamento e i titoli a cedola fissa.

6 - La nuda proprietà e l'usufrutto.

IL DENARO

Il vocabolo denaro deriva dal latino "denarius" con cui si indicava una moneta d'argento del valore di 10 "assi" o di 2,5 "sesterzi".
In lingua inglese si utilizza il vocabolo "money" che deriva dal nome della dea romana Giunone Moneta.
Il vocabolo moneta, infine, deriva dal latino "monere", che vuol dire "ammonire".
I due vocaboli, denaro e moneta, sono sinonimi e indicano genericamente "ciò che in generale viene accettato come mezzo per saldare un debito".
Un debito insorge quando si riceve "qualcosa" a titolo non gratuito e ne rappresenta la contropartita. Esso può essere saldato o immediatamente o posticipatamente.
Inizialmente, prima che fossero coniate le prime monete, il pagamento, ossia il saldo del debito, veniva effettuato tramite il baratto. Questo modo di operare, tuttavia, presenta un notevole svantaggio in quanto presuppone il raggiungimento di un accordo, volta per volta, sui quantitativi equivalenti delle merci da scambiare.
L'introduzione delle prime monete in metalli pregiati ha consentito l'introduzione del concetto di "prezzo" basato sul "peso" del metallo pregiato.
Nelle economie moderne i metalli pregiati sono stati sostituiti da banconote e monete garantite da banche e governi.
Questo denaro "ufficiale" è detto anche denaro "contante". Esso può essere sostituito dall'uso di assegni bancari, carte di credito, cambiali etcc. e la tendenza attuale è quella di realizzare una società nella quale non sia più necessario usare denaro contante.
Tuttavia, anche in una società senza denaro contante, le quantità di denaro devono continuare ad essere espresse in termini di importi monetari, ossia di multipli di una unità monetaria avente valore legale.
Un importo monetario C si può, pertanto, esprimere come il prodotto:

$$C = cU, \tag{1}$$

dove:
c = numero puro che rappresenta l'ammontare numerico dell'importo monetario,
U = unità monetaria (euro, dollaro, yen, etcc.).
L'unità monetaria, U, può essere considerata sia in valore assoluto o nominale, ed allora la indichiamo con U_n, che in valore relativo o reale (potere d'acquisto), ed allora la indichiamo con U_r.
U_n non varia al variare del tempo, fintanto che resta in vigore (la lira italiana è entrata in vigore nel 1861 ed è previsto che cesserà di avere valore legale nel 2002).
U_r varia, generalmente, al variare del tempo ed è, dunque, preferibile esprimerla tramite $U_r(t)$.
Nella tabella seguente è indicata l'evoluzione temporale del va-

VALORE DELLA LIRA 1861-2000	
Coefficienti di calcolo per trasformare le lire degli anni sottoindicati in lire 2000 (indice per le famiglie di operai e impiegati)	
Anni	**Coefficienti**
1861	7.911,8463
62	7.068,7442
63	7.280,5418
64	7.486,1540
65	7.613,2037
66	7.534,5142
67	7.353,9899
68	7.068,7442
69	7.026,1614
1870	6.926,0261
71	6.718,5645
72	5.944,6626
73	5.607,4173
74	5.475,7878
75	6.394,4232
76	6.043,2269
77	5.808,4801
78	6.030,7280
79	6.106,5068
1880	5.890,6202
81	6.297,7473
82	6.451,0111
83	6.664,8160
84	6.796,8695
85	6.649,6169
86	6.657,2078
87	6.672,4416
88	6.589,5073
89	6.479,6822
1890	6.257,2039
91	6.277,4101
92	6.331,9370
93	6.472,4906
94	6.501,3534

95	6.537,7960
96	6.567,2455
97	6.582,0700
98	6.537,7960
99	6.642,0433
1900	6.611,9206
01	6.604,4326
02	6.649,6169
03	6.458,1550
04	6.380,4311
05	6.373,4579
06	6.257,2039
07	5.975,1168
08	6.036,9710
09	6.210,5580
1910	6.043,2269
11	5.896,5763
12	5.843,4008
13	5.831,7140
14	5.831,7140
15	5.450,2000
16	4.355,2756
17	3.079,0465
18	2.208,1462
19	2.175,2010
1920	1.655,3261
21	1.399,1636
22	1.407,6066
23	1.415,8082
24	1.367,6628
25	1.217,4768
26	1.128,6460
27	1.234,4865
28	1.332,0498
29	1.311,0868
1930	1.354,0084
31	1.498,7700
32	1.539,1169

33	1.635,8244
34	1.724,8489
35	1.700,7040
36	1.581,2674
37	1.444,5663
38	1.341,5491
39	1.284,8015
1940	1.100,9466
41	951,4952
42	823,2233
43	490,8850
44	110,4617
45	56,0850
46	47,5220
47	29,3235
48	27,6950
49	27,2950
1950	27,6665
51	25,2171
52	24,1895
53	23,7275
54	23,1062
55	22,4753
56	21,4100
57	21,0044
58	20,0440
59	20,1282
1960	19,6075
61	19,0507
62	18,1262
63	16,8590
64	15,9153
65	15,2527
66	14,9534
67	14,6602
68	14,4757
69	14,0804
1970	13,3991

71		12,7611
72		12,0822
73		10,9470
74		9,1649
75		7,8220
76		6,7130
77		5,6842
78		5,0550
79		4,3676
1980		3,6053
81		3,0373
82		2,6106
83		2,2703
84		2,0531
85		1,8905
86		1,7818
87		1,7032
88		1,6228
89		1,5222
1990		1,4347
91		1,3482
92		1,2791
93		1,2275
94		1,1810
95		1,1210
96		1,0789
97		1,0605
98		1,0418
99		1,0256
2000		1,0000

Fonte: Istat

lore reale della lira italiana, ottenuta utilizzando l'indice delle famiglie di operai e impiegati calcolato dall'ISTAT e ponendo, solo per comodità di calcolo, $U_r(2000) = 1$, in quanto, concettualmente, è corretto porre:

$$U_r(0) = U_n = 1. \tag{2}$$

Tutti i membri della società accettano il denaro in cambio di beni e/o servizi, per mutuo accordo.
Il denaro, come qualsiasi bene o servizio, può essere scambiato e tale scambio risulta essere non banale solo se avviene in tempi diversi. Il soggetto che dà (presta) il denaro per primo, assume la posizione di "creditore", mentre il soggetto che lo deve restituire successivamente assume la posizione di "debitore".
La società nella quale viviamo accetta il seguente "postulato del rendimento del denaro", che può essere espresso tramite due proposizioni che si integrano tra loro.

Il postulato del rendimento del denaro

"Non è possibile garantirsi il possesso di un importo monetario a costo nullo o negativo".
"Il prezzo di un'operazione che consiste nel differire il termine di un credito (o anticipare quello di un debito) è negativo (inversamente, quindi, per anticipare il termine di un credito (o differire quello di un debito) il prezzo è positivo)".

Il postulato del rendimento del denaro costituisce di per se un dato di fatto di ordine storico piuttosto che una necessità logica.
Nella ipotetica situazione economica in cui nessuno o pochissimi avessero bisogno di denaro a prestito, non risulterebbe conveniente, infatti, accettare un importo impegnandosi a restituirlo, successivamente, aumentato, bensì risulterebbe conveniente restituirlo, successivamente, diminuito, per tener conto del servizio reso con la custodia.

LE OPERAZIONI FINANZIARIE

Le operazioni finanziarie si riducono a scambi di denaro; a volerle considerare nella loro accezione più larga possibile, potremo definirle come quei contratti di scambio in cui non figura nessuna merce fuorché il denaro.
In tale senso larghissimo rientrano tra le operazioni finanziarie anche le assicurazioni.
Dopo averne dato una definizione generale, vediamo ora di esaminarle più in dettaglio.
Una prima distinzione va fatta tra le operazioni finanziarie "certe" e quelle "aleatorie".
Un'operazione finanziaria è certa quando sono noti a priori con certezza sia tutti gli importi monetari (o capitali) che verranno scambiati che gli istanti in cui saranno esigibili.
Un'operazione finanziaria è aleatoria se non è certa.
Una seconda distinzione va fatta tra le operazioni finanziarie

"rigide" e quelle "elastiche".
Un'operazione finanziaria è rigida se tutto è stabilito alla stipulazione del contratto in modo unico ed irrevocabile.
Un'operazione finanziaria è elastica se il contratto consente la facoltà di scegliere tra diverse alternative, considerate equivalenti, in un istante successivo a quello della stipula del contratto.
Ritornando al discorso generale, un'operazione finanziaria è un qualunque insieme di pagamenti (in entrata o in uscita), caratterizzati dalle rispettive date di esigibilità.
Se limitiamo il discorso ad un insieme costituito da un numero finito o da un'infinità numerabile di elementi (x_i, t_i), con $i = 1, 2, \ldots, n$, dove x_i indica l'importo monetario i-esimo e t_i indica la sua data di esigibilità, allora un'operazione finanziaria O può essere rappresentata dai due vettori ad n componenti reali, con $n = 2, 3, \ldots$:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \tag{3}$$

che rappresenta il "vettore dei pagamenti" ed è anche detto "flusso degli importi", e

$$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}, \tag{4}$$

che rappresenta il "vettore delle scadenze associate" ed è anche detto "scadenzario",
e possiamo, dunque, scrivere in forma compatta:

$$O = \{X, T\} = X/T. \tag{5}$$

Ciascuna coppia (x_i, t_i) che costituisce l'operazione finanziaria O può essere, sostanzialmente, di quattro tipi diversi:
a) x_i e t_i sono entrambi deterministici;
b) x_i è deterministico e t_i è aleatorio;
c) x_i è aleatorio e t_i è deterministico;
a) x_i e t_i sono entrambi aleatori.
Se tutti gli elementi dell'insieme delle coppie (x_i, t_i) che costituisce l'operazione finanziaria O sono del tipo a), allora l'operazione finanziaria O è certa, mentre, nel caso contrario, è aleatoria.
Due operazioni finanziarie si definiscono "equivalenti" se differiscono tra loro solo per importi monetari di entità uguale a zero.
Si definisce somma di due operazioni finanziarie certe $O_1 = \{X_1, T_1\}$ e $O_2 = \{X_2, T_2\}$ l'operazione finanziaria $O = \{X_1 \cup X_2, T_1 \cup T_2\}$.
La più generale operazione finanziaria certa e rigida consiste nello scambio, stipulato in un certo istante t, tra due insiemi di pagamenti non anteriori a t.
Nella sua forma più semplice, che chiamiamo "elementare", un'operazione finanziaria di questo tipo, è costituita dallo scambio, concordato al tempo t tra due tizi, di due capitali diversi: il tizio A cede al tizio B il capitale C disponibile al tempo $t_1 \geq t$, e in cambio il tizio B cede (o s'impegna a restituire) al tizio A il capitale (montante):

$$M = C + I > C \tag{6}$$

al tempo $t_2 > t_1$.
L'importo monetario I è detto "interesse" ed il rapporto:

$$i = I/C \tag{7}$$

è detto "tasso di interesse sulla durata temporale $t_2 - t_1$".
Dal punto di vista di A, viene effettuata un'operazione di "investimento" o di "impiego" descritta da:

$$O_A = \{-C, +M\}/\{t_1, t_2\}, \tag{8}$$

mentre, dal punto di vista di B, viene effettuata un'operazione di "indebitamento" o di "provvista" descritta da:

$$O_B = \{+C, -M\}/\{t_1, t_2\}. \tag{9}$$

Se il tempo t_1 coincide con il tempo t, allora si parla di operazione "a pronti"; se, invece, risulta $t_1 > t$, allora si parla di operazione "a termine".

I TITOLI A CEDOLA NULLA

Sono titoli che garantiscono al possessore, detto "portatore", il pagamento (da parte di chi ha emesso il titolo, detto "emittente", al tempo t, detto "data di emissione", in cambio dell'importo monetario C, detto "prezzo di emissione") di un importo monetario M, detto "valore facciale" o "valore nominale" o "valore di rimborso", ad una stabilita data futura t_2, detta "scadenza" o "maturity".
Per acquisire questo diritto, il portatore, che è un investitore, deve pagare al tempo d'acquisto $t \le \tau < t_2$ un prezzo P, detto "prezzo di acquisto" o "corso" o "quotazione", che, se $\tau = t$, allora è pari a C e va versato all'emittente, oppure, se $\tau > t$, allora va versato al detentore.
L'acquisto di un titolo a cedola nulla configura, pertanto, un'operazione finanziaria del tipo O_A, espressa dalla (8), dove ora dobbiamo porre τ al posto di t_1 e P al posto di C se $\tau > t$, la cui durata $t_2 - \tau$ è detta "vita residua" o "vita a scadenza".
Un titolo di questo tipo viene definito, indifferentemente, "di puro sconto" o "a capitalizzazione integrale" o, in lingua inglese, "zero coupon bond".
Un esempio importante di titoli a cedola nulla è rappresentato dai BOT (Buoni ordinari del Tesoro), che sono obbligazioni emesse dallo Stato italiano caratterizzate dall'avere breve durata.
L'emissione dei BOT è fissata con decreto del Ministero del Tesoro, che viene pubblicato sulla "Gazzetta Ufficiale".
I BOT hanno un taglio minimo (valore facciale) di 5 milioni di lire e una durata $(t_2 - t)$ di 3 o 6 o 12 mesi.
Le emissioni dei BOT avvengono, attualmente, alla metà e alla fine di ogni mese e il collocamento avviene tramite asta.
L'acquisto dei BOT è gravato da una tassa, che va corrisposta all'atto dell'emissione e per un investitore, inteso come "persona

fisica", è pari al 12,50% dell'importo monetario $(M - C)$.

IL PRINCIPIO DI EQUIVALENZA INTERTEMPORALE TRA IMPORTI MONETARI

Riprendiamo in esame il vincolo (6) imposto all'operazione finanziaria elementare espressa tramite le (8) e (9), che rappresenta la conseguenza logica del postulato del rendimento del denaro.
La prima considerazione da fare è che l'importo monetario $I > 0$ dipende:
a) dall'importo monetario C, di cui, postulando, qui e nel seguito, la proprietà d'indipendenza dall'importo, risulta essere direttamente proporzionale;
b) dall'istante $t \leq t_1$ in cui viene concordata l'operazione finanziaria, in quanto al variare del tempo varia anche il punto di intersezione (o d'incontro o di equilibrio) tra le due curve di domanda e d'offerta di denaro, poiché una o entrambe possono subire spostamenti;
c) dall'istante t_1 in cui è esigibile l'importo monetario C, in quanto occorre tener conto della struttura temporale dei tassi di interesse;
d) dalla durata:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \tag{10}$$

dell'operazione finanziaria, in quanto, sempre per la formulazione del postulato del rendimento del denaro, quest'ultimo deve crescere al crescere della durata dell'operazione finanziaria, e, pertanto, può essere espresso tramite la:

$$I = C\Phi(t, t_1, \Delta t), \tag{11}$$

dove $\Phi: (0, +\infty) x [t, +\infty) x (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, per ogni coppia prefissata $(t, t_1) \in (0, +\infty) x [t, +\infty)$, è sottoposta ai due seguenti vincoli:

$$\text{a) } \Phi(t, t_1, 0) = 0, \tag{12}$$

b) deve essere, per il postulato del rendimento del denaro, monotona crescente al crescere di Δt.
Dalla (11) consegue, pertanto, un principio di equivalenza intertemporale tra importi monetari, che può essere formulato nel modo seguente: "al tempo t, è equivalente possedere l'importo monetario C al tempo t_1 oppure l'importo monetario $M = C(1 + \Phi(t, t_1, \Delta t))$ al tempo $t_2 = t_1 + \Delta t$, $\forall\, t_1 \geq t$ e $\forall\, \Delta t > 0$".
La funzione:

$$w(t, t_1, \Delta t) = 1 + \Phi(t, t_1, \Delta t) \tag{13}$$

è detta "funzione valore" e rappresenta l'importo monetario al tempo $t_2 = t_1 + \Delta t$ nel caso in cui $C = 1$.
L'operazione finanziaria elementare espressa tramite le (8) e (9) risulta, dunque, "equa" in base al principio di equivalenza intertemporale rappresentato dalla (13).
Limitandoci a considerare solo l'effetto prodotto dalla durata dell'operazione finanziaria, ipotizzando, cioè, che il punto di equilibrio tra la domanda e l'offerta di denaro rimanga invariato

nel tempo e che la struttura dei tassi di interesse al tempo t sia costante (piatta), possiamo concludere che, per il postulato del rendimento del denaro e per la proprietà dell'indipendenza dall'importo, deve essere:

$$I = Cf(\Delta t), \tag{11'}$$

dove $f:(0,+\infty) \to (0,+\infty)$ è una funzione continua e monotona crescente sottoposta al vincolo:

$$f(0) = 0. \tag{12'}$$

Dalle (6) e (11'), cioè sotto le ipotesi restrittive introdotte, consegue, pertanto, un principio di equivalenza intertemporale tra importi monetari, che può essere formulato nel modo seguente: "al tempo t, se l'interesse è definito tramite la (11'), allora è equivalente possedere l'importo monetario C al tempo t_1 oppure l'importo monetario $M = C(1 + f(\Delta t))$ al tempo $t_2 = t_1 + \Delta t$, $\forall\ \Delta t > 0$".
In quanto segue considereremo soltanto principi di equivalenza intertemporali tra importi monetari rappresentati da una funzione valore reale a valori positivi, avente dominio nel campo dei reali non negativi:

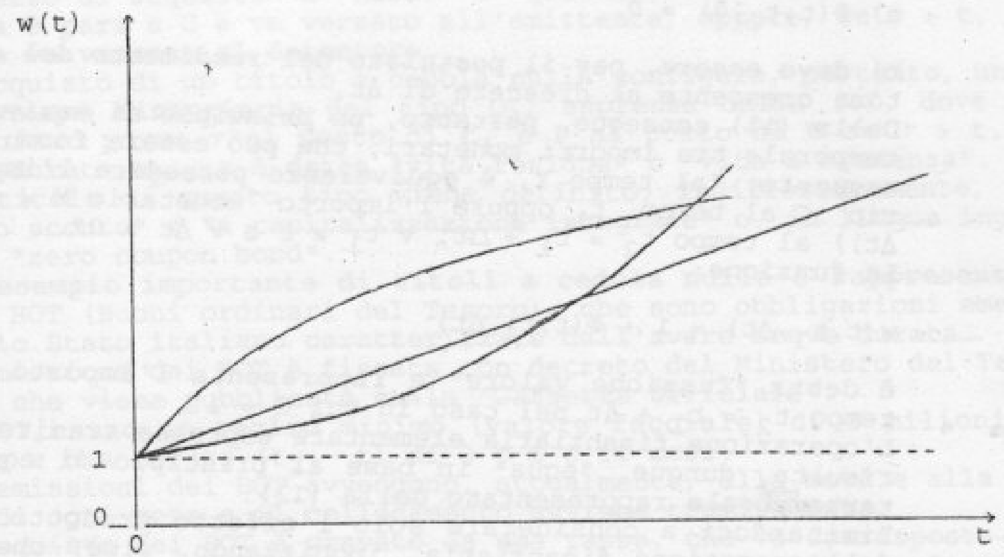
$$w(\Delta t) = 1 + f(\Delta t), \tag{13'}$$

che risulti continua e monotona crescente e soddisfi il vincolo:

$$w(0) = 1, \tag{12''}$$

in quanto è questo il caso che viene considerato nella matematica finanziaria classica, che costituisce oggetto d'insegnamento nel-

figura 1



la Scuola secondaria superiore.
Ora, poiché qualsiasi funzione del tipo della (13') che soddisfa il vincolo (12'') (vedi figura 1) può rappresentare la funzione valore di un principio di equivalenza intertemporale tra importi monetari, la scelta di una funzione w, o, equivalentemente, di una funzione f, risulta essere il risultato di un accordo tra le controparti. Nella pratica, viene usato, generalmente, solo un numero limitato di funzioni che rendono particolarmente agevoli i calcoli e, caso per caso, viene scelta quella tra loro che gode delle proprietà più opportune.
Con riferimento ad una generica funzione w possiamo ora definire, con l'ausilio della figura 2, le seguenti grandezze espresse come funzioni di due variabili, che vengono largamente utilizzate in matematica finanziaria:

a) interesse, $I(t,t+\Delta t) = \overline{DE}$;

b) fattore di capitalizzazione, $m(t,t+\Delta t) = \overline{BE}/\overline{BD}$;

c) fattore di sconto, $v(t,t+\Delta t) = \overline{BD}/\overline{BE} = 1/m(t,t+\Delta t)$;

d) tasso di interesse (o di rendimento), $i(t,t+\Delta t) = \overline{DE}/\overline{BD} =$

$$= I(t,t+\Delta t)/w(t) = m(t,t+\Delta t) - 1 = (1/v(t,t+\Delta t)) - 1;$$

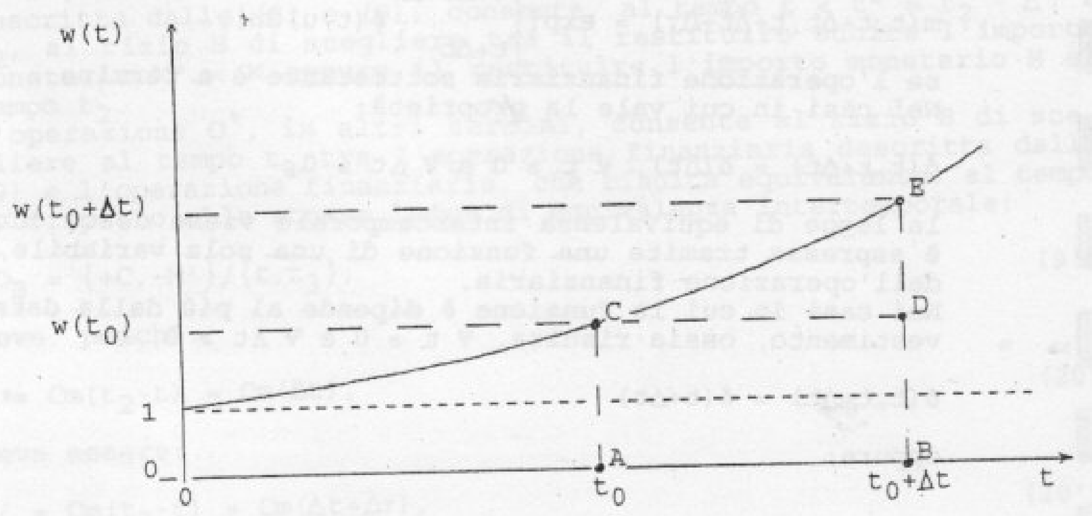
e) tasso di sconto (o di interesse anticipato), $s(t,t+\Delta t) =$

$$= \overline{DE}/\overline{BE} = I(t,t+\Delta t)/w(t+\Delta t) = 1 - v(t,t+\Delta t) = 1 - (1/m(t,t+\Delta t));$$

f) intensità istantanea di interesse o di sconto (o forza di interesse o di sconto), $\delta(t) =$

$$= w'(t)/w(t) = \frac{d}{dt}\log w(t)$$

figura 2



(la definizione della funzione δ richiede, ovviamente, che la funzione w oltre ad essere continua sia anche derivabile) ovvero:

$$\delta(t,t+\Delta t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} [(1 - v(t,t+\Delta t,t+\Delta t+\Delta\tau))/\Delta\tau v(t,t+\Delta t,t+\Delta t+\Delta\tau)] \quad (14)$$

LE LEGGI DI EQUIVALENZA INTERTEMPORALE TRA GLI IMPORTI MONETARI

Una legge di equivalenza intertemporale tra gli importi monetari è espressa tramite una funzione di una, due o tre variabili che consente di associare, ad ogni istante $t \geq 0$, l'importo monetario equivalente all'importo monetario unitario esigibile all'istante $t_1 \neq t$, $\forall\ t_1 \geq 0$, e, pertanto, la funzione valore è una legge di equivalenza intertemporale.
Le sei funzioni $I(t,t+\Delta t)$, $m(t,t+\Delta t)$, $v(t,t+\Delta t)$, $i(t,t+\Delta t)$, $s(t,t+\Delta t)$ e $\delta(t,t+\Delta t)$, appena introdotte, sono, a loro volta, leggi (o "regimi, se in esse figurano parametri) di equivalenza intertemporale a due variabili (dipendenti cioè dalla data della stipula del contratto, che coincide con la data di investimento, e dalla data di disinvestimento) e le prime cinque caratterizzano le sole operazioni finanziarie a pronti.
Nel caso in cui si vogliano, viceversa, caratterizzare le operazioni finanziarie a termine, le prime cinque di esse risultano essere funzioni di tre variabili, in quanto la data di stipula del contratto non coincide più con la data d'inizio dell'operazione finanziaria.
Come è stato già evidenziato, ciascuna di esse può essere espressa in funzione di ciascuna delle altre cinque e, pertanto, è sufficiente definirne una per definirle tutte.
Nel seguito sarà prevalentemente utilizzata la funzione fattore di capitalizzazione m, che può significativamente essere espressa per mezzo della funzione δ tramite le:

$$m(t,t+\Delta t) = \exp\left[\int_t^{t+\Delta t} \delta(t,u)du\right], \quad (15)$$

se l'operazione finanziaria sottostante è a pronti, e:

$$m(t,t+\Delta t,t+\Delta t+\Delta\tau) = \exp\left[\int_{t+\Delta t}^{t+\Delta t+\Delta\tau} \delta(t,u)du\right], \quad (15')$$

se l'operazione finanziaria sottostante è a termine.
Nei casi in cui vale la proprietà:

$$\delta(t,t+\Delta t) = \delta(\Delta t),\ \forall\ t \geq 0 \text{ e } \forall\ \Delta t \geq 0, \quad (16)$$

la legge di equivalenza intertemporale viene detta "uniforme" ed è espressa tramite una funzione di una sola variabile, la durata dell'operazione finanziaria.
Nei casi in cui la funzione δ dipende al più dalla data di disinvestimento, ossia risulta, $\forall\ t \geq 0$ e $\forall\ \Delta t \geq 0$, o:

$$\delta(t,t+\Delta t) = \delta(t+\Delta t) \quad (17)$$

oppure:

$$\delta(t, t+\Delta t) = \delta_0 = \text{cost.}, \tag{18}$$

la legge di equivalenza intertemporale viene detta "scindibile". In un mercato perfetto, le leggi finanziarie sono scindibili, ossia verificano le relazioni di uguaglianza:

$$v(t, t+\Delta t+\Delta\tau) = v(t, t+\Delta t)\, v(t+\Delta t, t+\Delta t+\Delta\tau) =$$

$$= v(t, t+\Delta t)\, v(t, t+\Delta t, t+\Delta t+\Delta\tau). \tag{19}$$

Per le leggi di equivalenza intertemporale a una variabile (la durata dell'operazione) la scindibilità deriva dalla costanza della forza di interesse.

LE PRINCIPALI LEGGI DI EQUIVALENZA INTERTEMPORALE TRA GLI IMPORTI MONETARI

Per quanto detto in precedenza, ci limiteremo a considerare, nel seguito, solo leggi di equivalenza intertemporale uniformi.
Le leggi di equivalenza intertemporale di questo tipo, più usate nella pratica, sono tre:
a) la legge degli interessi semplici (o legge della capitalizzazione lineare);
b) la legge degli interessi composti (o legge della capitalizzazione esponenziale);
c) la legge dello sconto commerciale (o legge della capitalizzazione iperbolica).
Prima di passare alla loro descrizione, è opportuno introdurre le due seguenti operazioni finanziarie elementari, certe, a pronti ($t_1 = t$) ed elastiche:
a) O^*, che, in riferimento all'operazione finanziaria elementare descritta dalle (8) e (9), consente, al tempo t_2, al tizio B di scegliere tra il restituire subito l'importo monetario M oppure il restituire l'importo monetario $M' > M$ al tempo $t_3 = t_2 + \Delta\tau > t_2$.
b) $O°$, che, in riferimento all'operazione finanziaria elementare descritta dalle (8) e (9), consente, al tempo $t < t° = t_2 - \Delta\tau < t_2$, al tizio B di scegliere tra il restituire subito l'importo monetario $M° < M$ oppure il restituire l'importo monetario M al tempo t_2.
L'operazione O^*, in altri termini, consente al tizio B di scegliere al tempo t_2 tra l'operazione finanziaria descritta dalla (9) e l'operazione finanziaria, che risulta equivalente, al tempo t, rispetto alla stessa legge di equivalenza intertemporale:

$$E^{O}{}_{B} = \{+C, -M'\}/\{t, t_3\}, \tag{9'}$$

dove, poiché:

$$M = Cm(t_2 - t) = Cm(\Delta t), \tag{20}$$

deve essere:

$$M' = Cm(t_3 - t) = Cm(\Delta t+\Delta\tau), \tag{20'}$$

che gli consente di differire la restituzione del debito.
L'operazione O°, invece, consente al tizio B di scegliere al tempo t° tra l'operazione finanziaria descritta dalla (9) e l'operazione finanziaria, che risulta equivalente, al tempo t, rispetto alla stessa legge di equivalenza intertemporale:

$$_{E}O_{B} = \{+C, -M^{\circ}\}/\{t, t+\Delta t-\Delta\tau\}, \tag{9''}$$

dove, per la (20), deve essere:

$$M^{\circ} = Cm(t^{\circ}-t) = Cm(\Delta t-\Delta\tau), \tag{20''}$$

che gli consente di anticipare la restituzione del debito.
Ciò premesso, cominciamo con l'esaminare la legge degli interessi semplici.
Essa è descritta tramite la funzione:

$$m(t, t+\Delta t) = 1 + i(t, t+\Delta t) = 1 + i\Delta t, \tag{21}$$

dove la costante i, che ha le dimensioni di un tasso di interesse diviso un tempo e che, nel seguito, considereremo sempre positiva e minore di 1, ha un valore che si ottiene dalla:

$$i = i(t, t+\Delta t)/\Delta t = i(t, t+1)/1, \ \forall\, t \geq 0 \text{ e } \forall\, \Delta t \geq 0. \tag{22}$$

Applicando tale legge di equivalenza intertemporale, l'operazione finanziaria O^{*} si può, dunque, esprimere tramite la coppia di operazioni finanziarie elementari, equivalenti al tempo t:

$$\begin{cases} O_{B} = \{+C, -C(1+i\Delta t)\}/\{t, t+\Delta t\}, \\ _{E}O_{B} = \{+C, -C(1+i(\Delta t+\Delta\tau))\}/\{t, t+\Delta t+\Delta\tau\}, \end{cases} \tag{23}$$

e, pertanto, si ha:

$$\begin{cases} M = C + I = C + Ci\Delta t \\ M' = C + I' = C + Ci(\Delta t+\Delta\tau) = C + Ci\Delta t + Ci\Delta\tau = M + Ci\Delta\tau. \end{cases} \tag{24}$$

Dalla seconda delle (23) emerge chiaramente il contenuto concettuale della legge degli interessi semplici, che può essere sintetizzato tramite una o l'altra delle due proposizioni seguenti:
"se si sceglie la legge degli interessi semplici, allora il prezzo da pagare per differire la restituzione del montante è data dal prodotto di tre fattori: il capitale ricevuto, il valore numerico i del tasso di interesse valutato sulla durata temporale unitaria e la durata del differimento";
"se si sceglie la legge degli interessi semplici, allora gli interessi maturati non producono interesse".
Come è stato già evidenziato, le due operazioni finanziarie equivalenti definite dalle (23) sono due operazioni finanziarie a pronti.
Partendo dalle (23), è possibile definire la relazione che intercorre tra il tasso di interesse, valutato sulla durata temporale unitaria, per le operazioni a pronti e il tasso di interesse, va-

lutato sulla durata temporale unitaria, per le operazioni a termine nel caso in cui si adotti la legge degli interessi semplici. Dalla seconda delle (24) si ricava:

$$i(t,t+\Delta t,t+\Delta t+\Delta\tau) = (M'-M)/M = Ci(t+\Delta t,t+\Delta t+\Delta\tau)/C(1+i(t,t+\Delta t)) =$$
$$= i(t,t+1)\Delta\tau/(1+i(t,t+1)\Delta t) \qquad (25)$$

da cui, ponendo, per semplificare al massimo, $\Delta t = \Delta\tau = 1$, si ottiene:

$$i(t,t+1,t+2) = i(t,t+2)/(1+i(t,t+2)) =$$
$$= 2i(t,t+1)/(1+2i(t,t+1)) < i(t,t+1). \qquad (26)$$

Si può dimostrare altresì, facilmente, che risulta (nell'ipotesi in cui sia offerta, nel contratto stipulato al tempo t, al tizio B la possibilità di scegliere, al tempo t_3, tra il restituire il montante M' subito o restituire il montante M'' al tempo $t_4 > t_3$ e così via):

$$i(t,t+1,t+2) > i(t,t+2,t+3) > i(t,t+3,t+4) > \ldots \qquad (27)$$

Le (26) e (27) sono in accordo col fatto che l'intensità istantanea di interesse, espressa tramite la:

$$\delta(t,t+\Delta t) = i/(1+i\Delta t), \qquad (28)$$

è una funzione decrescente al crescere di Δt.
Dalla (28) si evince che la legge degli interessi semplici non è scindibile.
Passiamo ora ad esaminare la legge degli interessi composti.
Essa è descritta tramite la funzione:

$$m(t,t+\Delta t) = 1 + i(t,t+\Delta t) = (1+i)^{\Delta t} = e^{\delta\Delta t}, \qquad (29)$$

dove, anche in questo caso, la costante i ha lo stesso valore numerico del tasso di interesse $i(t,t+1)$, come si può facilmente dimostrare ponendo nella (29) $\Delta t = 1$, e:

$$\delta = \log(1+i) = \text{cost.}. \qquad (30)$$

Applicando tale legge di equivalenza intertemporale, l'operazione finanziaria O_* si può, dunque, esprimere tramite la coppia di operazioni finanziarie elementari, equivalenti al tempo t:

$$\begin{cases} O_B = \{+C,-C(1+i)^{\Delta t}\}/\{t,t+\Delta t\}, \\ {}_E O_B = \{+C,-C(1+i)^{\Delta t+\Delta\tau}\}/\{t,t+\Delta t+\Delta\tau\}, \end{cases} \qquad (31)$$

e, pertanto, si ha:

$$\begin{cases} M = C + I = C(1+i)^{\Delta t} \\ M' = C + I' = C(1+i)^{\Delta t+\Delta\tau} = C(1+i)^{\Delta t}(1+i)^{\Delta\tau} = \end{cases} \qquad (32)$$

$$= M(1 + i)^{\Delta\tau} = M + M[(1 + i)^{\Delta\tau} - 1].$$

Dalla seconda delle (32) emerge chiaramente il contenuto concettuale della legge degli interessi composti, che può essere sintetizzato tramite una o l'altra delle due proposizioni seguenti:
"se si sceglie la legge degli interessi composti, allora il prezzo da pagare per differire la restituzione del montante è dato dal prodotto di due fattori, di cui uno, il montante, rimane costante, mentre l'altro cresce in modo più che proporzionale al crescere della durata del differimento";
"se si sceglie la legge degli interessi composti, allora gli interessi maturati producono a loro volta interesse".
Come per le (23), le due operazioni finanziarie equivalenti definite dalle (31) sono due operazioni finanziarie a pronti.
Partendo dalle (31), è possibile definire la relazione che intercorre tra il tasso di interesse, valutato sulla durata temporale unitaria, per le operazioni a pronti e il tasso di interesse, valutato sulla durata temporale unitaria, per le operazioni a termine nel caso in cui si adotti la legge degli interessi composti.
Dalla seconda delle (32) si ricava:

$$i(t,t+\Delta t,t+\Delta t+\Delta\tau) = (M'-M)/M = (1 + i(t,t+1))^{\Delta\tau} - 1 \tag{33}$$

da cui, ponendo, per semplificare al massimo, $\Delta t = \Delta\tau = 1$, si ottiene:

$$i(t,t+1,t+2) = i(t,t+1). \tag{34}$$

Si può dimostrare altresì, facilmente, che risulta (nell'ipotesi in cui sia offerta al tizio B la possibilità scegliere, al tempo t_3, tra il restituire il montante M' subito o restituire il montante M'' al tempo $t_4 > t_3$ e così via):

$$i(t,t+1,t+2) = i(t,t+2,t+3) = i(t,t+3,t+4) = \ldots \tag{35}$$

Le (31) e (32) sono in accordo col fatto che l'intensità istantanea di interesse, espressa tramite la:

$$\delta(t,t+\Delta t) = \delta, \tag{36}$$

è, ora, una funzione costante e, quindi, non varia né al variare di t né al variare di Δt.
Come si evince dalla (36), la legge degli interessi composti è scindibile e va evidenziato, altresì, che, nell'ambito delle leggi di equivalenza intertemporale che dipendono dalla sola durata dell'operazione, con una struttura sottostante piatta, è anche l'unica ad essere tale.
Esaminiamo, infine, la legge dello sconto commerciale.
Essa viene applicata quando si vuole anticipare il pagamento del montante ed è descritta tramite la funzione:

$$m(t,t+\Delta t) = 1 + i(t,t+\Delta t) = 1/(1 - k\Delta t), \tag{37}$$

dove la costante k, che ha le dimensioni di un tasso di sconto diviso per un tempo, ha un valore che si ottiene dalla:

$$k = i(t,t+1)/[1 + i(t,t+1)] = s(t,t+1). \tag{38}$$

che ora è definita solo per valori di t compresi nell'intervallo temporale $(0,1/k)$.
Applicando tale legge di equivalenza intertemporale, l'operazione finanziaria $O°$ si può, dunque, esprimere tramite la coppia di operazioni finanziarie elementari equivalenti al tempo t:

$$\begin{cases} O_B = \{+C, -C/(1-k\Delta t)\}/\{t, t+\Delta t\}, \\ {}_EO_B = \{+C, -C/[1-k(\Delta t-\Delta\tau)]\}/\{t, t+\Delta t-\Delta\tau\}, \end{cases} \tag{39}$$

e, pertanto, si ha:

$$\begin{cases} M = C + I = C[1/(1-k\Delta t)] \\ M° = C + I° = C[1/(1-k(\Delta t-\Delta\tau))] = M[(1-k\Delta t)/(1-k(\Delta t-\Delta\tau))] = \\ \quad = M - M[k\Delta\tau/(1-k(\Delta t-\Delta\tau))]. \end{cases} \tag{40}$$

Dalla seconda delle (40) emerge chiaramente il contenuto concettuale della legge dello sconto commerciale, che può essere sintetizzato tramite la proposizione seguente:
"se si sceglie la legge dello sconto commerciale, allora lo sconto, $M - M°$, che si ottiene anticipando la restituzione del montante è dato dal prodotto di due fattori, di cui uno, il montante, rimane costante, mentre l'altro cresce, in modo meno che proporzionale, al crescere dell'intervallo temporale che intercorre tra il momento in cui il debito viene saldato e la scadenza dell'operazione".
Come per le (23), le due operazioni finanziarie equivalenti definite dalle (39) sono due operazioni finanziarie a pronti.
Partendo dalle (39), è possibile definire la relazione che intercorre tra il tasso di interesse, valutato sulla durata temporale unitaria, per le operazioni a pronti e il tasso di interesse, valutato sulla durata temporale unitaria, per le operazioni a termine nel caso in cui si adotti la legge degli interessi composti.
Dalla seconda delle (40) si ricava:

$$i(t,t+\Delta t-\Delta\tau,t+\Delta t) = (M-M°)/M° = k\Delta\tau/(1-k\Delta t), \tag{41}$$

da cui, ponendo, per semplificare al massimo, $\Delta t = 2$ e $\Delta\tau = 1$ e ricordando la (38), si ottiene:

$$i(t,t+1,t+2) = i(t,t+1)/(1-i(t,t+1)) > i(t,t+1). \tag{42}$$

Si può dimostrare altresì, facilmente, che risulta (nell'ipotesi in cui sia offerta al tizio B la possibilità di scegliere, al tempo t_3, tra il restituire il montante M' subito o restituire il montante M'' al tempo $t_4 > t_3$ e così via):

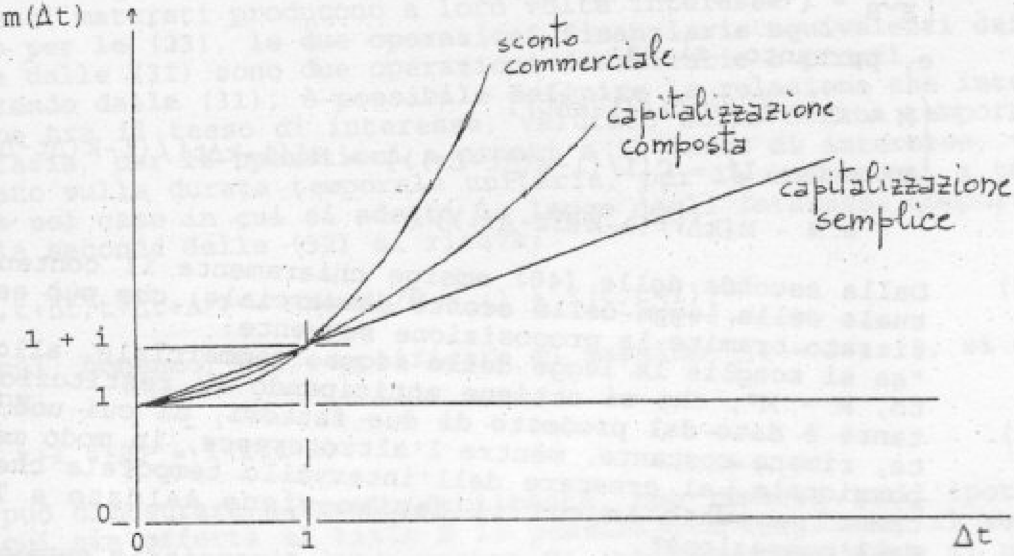
$$i(t,t+1,t+2) < i(t,t+2,t+3) < \ldots, \quad \forall\, t + i < 1/k, \text{ con } i \geq 2, \tag{43}$$

Le (42) e (43) sono in accordo col fatto che l'intensità istantanea di interesse, espressa tramite la:

$$\delta(t, t+\Delta t) = k/(1-k\Delta t), \tag{44}$$

è, ora, una funzione crescente al crescere di Δt.
Dalla (44) si evince che la legge dello sconto commerciale non è scindibile.
Nella figura 3 sono poste a confronto le funzioni fattore di capitalizzazione $m(t,t+\Delta t)$, con $t = 0$, associate alle tre leggi di equivalenza intertemporale considerate.

figura 3



Come si può notare le tre funzioni assumono lo stesso valore, $1 + i$, solo per $\Delta t = 1$.

LE RENDITE

Con il termine "rendita" si intende indicare una successione di importi monetari, tutti dello stesso segno, denominati "rate" o "termini" della rendita, esigibili con cadenza periodica.
Si definisce "operazione di rendita" un'operazione finanziaria composta del tipo:

$$O_r = X/T = \{\mp x_0, \pm r_1, \pm r_2, \ldots, \pm r_n\}/\{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}, \tag{45}$$

dove:
il doppio segno tiene conto del fatto che l'operazione finanziaria risulta diversa se esaminata dal punto di vista dell'investitore (segni superiori) o dal punto di vista di colui che si indebita (segni inferiori),
$x_0 = w(t_0)$ rappresenta, in base alla legge di equivalenza adottata, il valore della rendita $r = \{\pm r_1, \pm r_2, \ldots, \pm r_n\}/\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ al tempo t_0,
$n \geq 2$,

$t_1 > t_0$,
$t_k = t_1 + (k-1)\Delta t$,
$k = 1, 2, \ldots, n$,
$\Delta t > 0$.
Tale operazione può essere scomposta in n operazioni finanziarie elementari del tipo:

$$O_k = X_k/T_k = \{\mp y_{0,k}, \pm r_k\}/\{t_0, t_k\}, \tag{46}$$

dove:
$k = 1, 2, \ldots, n$,

$$\sum_{k=1}^{n} y_{0,k} = x_0, \tag{47}$$

tutte sottoposte alla stessa legge di equivalenza intertemporale, che è poi la stessa legge che governa la (45).
Le operazioni di rendita possono essere classificate in base a:
a) la durata della rendita ("temporanee", se $2 \le n \le m < +\infty$, o "perpetue", se $n = +\infty$);
b) l'istante t_1 ("immediate", se $t_1 = t_0$ (anticipate) oppure $t_1 = t_0 + \Delta t$ (posticipate), o "differite", se $t_1 = t_0 + k\Delta t$, con $k \ge 1$ (anticipate) oppure $k \ge 2$ (posticipate));
c) l'ammontare della rata ("a rata costante", se $r_k = r_{k-1}$, per $k = 2, 3, \ldots, n$, o "a rata variabile", in ogni altro caso).
Se, come normalmente si usa, si valuta l'operazione di rendita in base alla legge esponenziale, allora, nel caso più semplice in cui $t_1 = t_0 + 1$ e le n rate, con n finito, sono di importo costante e pari a R (rendita temporanea, immediata e posticipata), l'operazione di rendita risulta essere equa se è verificata la:

$$x_0 = R \sum_{k=1}^{n} (1 + i)^{-k} = R \sum_{k=1}^{n} v^k, \tag{48}$$

dove:

$$0 < v = 1/(1 + i) < 1. \tag{49}$$

Poiché il secondo membro della (48) è la somma di n termini in progressione geometrica, con primo termine uguale a Rv e ragione uguale a v, la (48) si può riscrivere:

$$x_0 = Rv[(1 - v^n)/(1 - v)] = Ra_{\overline{n|}i}, \tag{50}$$

dove il simbolo $a_{\overline{n|}i}$, che si legge "a figurato n al tasso i" mette in evidenza il numero delle rate n ed il valore numerico i del tasso di interesse $i(t,t+1)$.
La tabella allegata mostra come $a_{\overline{n|}i}$ varia al variare di n da 1 a 100 e il valore che assume per $n = \infty$, per valori di i pari al 4%, 4,25%, 4,50%, 4,75% e 5%.
Vediamo ora, sinteticamente, come variano x_0 e il fattore che moltiplica il valore costante R della rata a secondo membro della (50), al variare delle caratteristiche dell'operazione di rendita.
Sia:
a) n finito, $t_1 = t_0$ (rendita temporanea, immediata e anticipata)

Tav. 15 *(seguito)*

VALORE ATTUALE DELLA RENDITA UNITARIA IMMEDIATA

*Avv. ai §§ 12, 14**

Valore attuale di n annualità posticipate di una lira (sconto composto)

$a_{\overline{n}|}$ Valori di $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \dfrac{1 - v^n}{i}$ $a_{\overline{n}|}$

anni (n)	4%	4,25%	4,50 %	4,75%	5%
1	0,9615 3846	0,9592 3261	0,9569 3780	0,9546 5394	0,9523 8095
2	1,8860 9467	1,8793 5982	1,8726 6775	1,8660 1808	1,8594 1043
3	2,7750 9103	2,7619 7585	2,7489 6435	2,7360 5545	2,7232 4803
4	3,6298 9522	3,6086 0993	3,5875 2570	3,5666 4004	3,5459 5050
5	4,4518 2233	4,4207 2895	4,3899 7674	4,3595 6090	4,3294 7667
6	5,2421 3686	5,1997 4000	5,1578 7248	5,1165 2592	5,0756 9206
7	6,0020 5467	5,9469 9280	5,8927 0094	5,8391 6556	5,7863 7340
8	6,7327 4487	6,6637 8206	6,5958 8607	6,5290 3633	6,4632 1276
9	7,4353 3161	7,3513 4970	7,2687 9050	7,1876 2418	7,1078 2168
10	8,1108 9578	8,0108 8700	7,9127 1818	7,8163 4767	7,7217 3493
11	8,7604 7671	8,6435 3669	8,5289 1692	8,4165 6102	8,3064 1422
12	9,3850 7376	9,2503 9491	9,1185 8078	8,9895 5706	8,8632 5164
13	9,9856 4785	9,8325 1310	9,6828 5242	9,5365 6998	9,3935 7299
14	10,5631 2293	10,3908 9986	10,2228 2528	10,0587 7803	9,8986 4094
15	11,1183 8743	10,9265 2265	10,7395 4573	10,5573 0599	10,3796 5804
16	11,6522 9561	11,4403 0949	11,2340 1505	11,0332 2768	10,8377 6956
17	12,1656 6885	11,9331 5059	11,7071 9143	11,4875 6819	11,2740 6625
18	12,6592 9697	12,4058 9985	12,1599 9180	11,9213 0615	11,6895 8690
19	13,1339 3940	12,8593 7636	12,5932 9359	12,3353 7580	12,0853 2086
20	13,5903 2634	13,2943 6581	13,0079 3645	12,7306 6902	12,4622 1034
21	14,0291 5995	13,7116 2188	13,4047 2388	13,1080 3725	12,8211 5271
22	14,4511 1533	14,1118 6751	13,7844 2476	13,4682 9332	13,1630 0258
23	14,8568 4167	14,4957 9617	14,1477 7489	13,8122 1319	13,4885 7388
24	15,2469 6314	14,8640 7307	14,4954 7837	14,1405 3765	13,7986 4179
25	15,6220 7994	15,2173 3627	14,8282 0896	14,4539 7389	14,0939 4457
26	15,9827 6918	15,5561 9787	15,1466 1145	14,7531 9703	14,3751 8530
27	16,3295 8575	15,8812 4496	15,4513 0282	15,0388 5158	14,6430 3362
28	16,6630 6322	16,1930 4072	15,7428 7351	15,3115 5282	14,8981 2726
29	16,9837 1463	16,4921 2539	16,0218 8853	15,5718 8814	15,1410 7358
30	17,2920 3330	16,7790 1717	16,2888 8854	15,8204 1827	15,3724 5103
31	17,5884 9356	17,0542 1311	16,5443 9095	16,0576 7854	15,5928 1050
32	17,8735 5150	17,3181 9003	16,7888 9086	16,2841 7999	15,8026 7667
33	18,1476 4567	17,5714 0531	17,0228 6207	16,5004 1049	16,0025 4921
34	18,4111 9776	17,8142 9766	17,2467 5796	16,7068 3579	16,1929 0401
35	18,6646 1323	18,0472 8792	17,4610 1240	16,9039 0052	16,3741 9429
36	18,9082 8195	18,2707 7978	17,6660 4058	17,0920 2913	16,5468 5171
37	19,1425 7880	18,4851 6046	17,8622 3979	17,2716 2686	16,7112 8734
38	19,3678 6423	18,6908 0140	18,0499 9023	17,4430 8053	16,8678 9271
39	19,5844 8484	18,8880 5890	18,2296 5572	17,6067 5946	17,0170 4067
40	19,7927 7388	19,0772 7472	18,4015 8442	17,7630 1619	17,1590 8635
41	19,9930 5181	19,2587 7671	18,5661 0949	17,9121 8729	17,2943 6796
42	20,1856 2674	19,4328 7934	18,7235 4975	18,0545 9407	17,4232 0758
43	20,3707 9494	19,5998 8426	18,8742 1029	18,1905 4327	17,5459 1198
44	20,5488 4129	19,7600 8082	19,0183 8305	18,3203 2770	17,6627 7331
45	20,7200 3970	19,9137 4659	19,1563 4742	18,4442 2692	17,7740 6982
46	20,8846 5356	20,0611 4781	19,2883 7074	18,5625 0780	17,8800 6650
47	21,0429 3612	20,2025 3987	19,4147 0884	18,6754 2511	17,9810 1571
48	21,1951 3088	20,3381 6774	19,5356 0654	18,7832 2206	18,0771 5782
49	21,3414 7200	20,4682 6642	19,6512 9813	18,8861 3085	18,1687 2173
50	21,4821 8462	20,5930 6131	19,7620 0778	18,9843 7312	18,2559 2546

Valore attuale di n annualità *anticipate* di 1 lira: $\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n-1}|} + 1$.

Esempio. Per trovare il valore attuale di 25 annualità anticipate si cerca nella tavola il valore corrispondente a 24 annualità e si aggiunge 1.

anni (n)	4%	4,25%	4,50%	4,75%	5%
51	21,6174 8521	20,7127 6864	19,8679 5003	19,0781 6050	18,3389 7663
52	21,7475 8193	20,8275 9582	19,9693 3017	19,1676 9499	18,4180 7298
53	21,8726 7493	20,9377 4179	20,0663 4466	19,2531 6944	18,4934 0284
54	21,9929 5667	21,0433 9740	20,1591 8149	19,3347 6796	18,5651 4556
55	22,1086 1218	21,1447 4571	20,2480 2057	19,4126 6631	18,6334 7196
56	22,2198 1940	21,2419 6231	20,3330 3404	19,4870 3228	18,6985 4473
57	22,3267 4943	21,3352 1565	20,4143 8664	19,5580 2604	18,7605 1879
58	22,4295 6676	21,4246 6729	20,4922 3602	19,6258 0052	18,8195 4170
59	22,5284 2957	21,5104 7222	20,5667 3303	19,6905 0169	18,8757 5400
60	22,6234 8997	21,5927 7911	20,6380 2204	19,7522 6891	18,9292 8952
61	22,7148 9421	21,6717 3056	20,7062 4118	19,8112 3524	18,9802 7574
62	22,8027 8289	21,7474 6337	20,7715 2266	19,8675 2768	19,0288 3404
63	22,8872 9124	21,8201 0874	20,8339 9298	19,9212 6747	19,0750 8003
64	22,9685 4927	21,8897 9256	20,8937 7319	19,9725 7038	19,1191 2384
65	23,0466 8199	21,9566 3555	20,9509 7913	20,0215 4690	19,1610 7033
66	23,1218 0961	22,0207 5352	21,0057 2165	20,0683 0253	19,2010 1936
67	23,1940 4770	22,0822 5758	21,0581 0684	20,1129 3798	19,2390 6606
68	23,2635 0740	22,1412 5427	21,1082 3621	20,1555 4938	19,2753 0101
69	23,3302 9558	22,1978 4582	21,1562 0690	20,1962 2853	19,3098 1048
70	23,3945 1498	22,2521 3029	21,2021 1187	20,2350 6303	19,3426 7665
71	23,4562 6440	22,3042 0171	21,2460 4007	20,2721 3655	19,3739 7776
72	23,5156 3885	22,3541 5032	21,2880 7662	20,3075 2892	19,4037 8834
73	23,5727 2966	22,4020 6266	21,3283 0298	20,3413 1639	19,4321 7937
74	23,6276 2468	22,4480 2174	21,3667 9711	20,3735 7174	19,4592 1845
75	23,6804 0834	22,4921 0718	21,4036 3360	20,4043 6443	19,4849 6995
76	23,7311 6187	22,5343 9538	21,4388 8383	20,4337 6079	19,5094 9519
77	23,7799 6333	22,5749 5960	21,4726 1611	20,4618 2414	19,5328 5257
78	23,8268 8782	22,6138 7012	21,5048 9579	20,4886 1493	19,5550 9768
79	23,8720 0752	22,6511 9436	21,5357 8545	20,5141 9087	19,5762 8351
80	23,9153 9185	22,6869 9698	21,5653 4493	20,5386 0703	19,5964 6048
81	23,9571 0754	22,7213 4003	21,5936 3151	20,5619 1602	19,6156 7665
82	23,9972 1879	22,7542 8300	21,6207 0001	20,5841 6804	19,6339 7776
83	24,0357 8730	22,7858 8298	21,6466 0288	20,6054 1102	19,6514 0739
84	24,0728 7240	22,8161 9470	21,6713 9032	20,6256 9071	19,6680 0704
85	24,1085 3116	22,8452 7070	21,6951 1035	20,6450 5079	19,6838 1623
86	24,1428 1842	22,8731 6134	21,7178 0895	20,6635 3298	19,6988 7260
87	24,1757 8694	22,8999 1496	21,7395 3009	20,6811 7707	19,7132 1200
88	24,2074 8745	22,9255 7790	21,7603 1588	20,6980 2107	19,7268 6857
89	24,2379 6870	22,9501 9462	21,7802 0658	20,7141 0126	19,7398 7483
90	24,2672 7759	22,9738 0779	21,7992 4075	20,7294 5227	19,7522 6174
91	24,2954 5923	22,9964 5831	21,8174 5526	20,7441 0718	19,7640 5880
92	24,3225 5695	23,0181 8543	21,8348 8542	20,7580 9755	19,7752 9410
93	24,3486 1245	23,0390 2679	21,8515 6499	20,7714 5351	19,7859 9438
94	24,3736 6582	23,0590 1851	21,8675 2631	20,7842 0383	19,7961 8512
95	24,3977 5559	23,0781 9521	21,8828 0030	20,7963 7597	19,8058 9059
96	24,4209 1884	23,0965 9013	21,8974 1655	20,8079 9615	19,8151 3390
97	24,4431 9119	23,1142 3514	21,9114 0340	20,8190 8940	19,8239 3705
98	24,4646 0692	23,1311 6080	21,9247 8794	20,8296 7962	19,8323 2100
99	24,4851 9896	23,1473 9645	21,9375 9612	20,8397 8961	19,8403 0571
100	24,5049 9900	23,1629 7022	21,9498 5274	20,8494 4116	19,8479 1020
∞	25,0000 0000	23,5294 1176	22,2222 2222	21,0526 3158	20,0000 0000

Esatta fino alla lira per annualità inferiori a L. 100.000.000.

Per l'uso della tavola quando i versamenti sono semestrali, trimestrali, ecc., ved. *Avvertenze*.

$$x_0 = R \sum_{k=1}^{n} v^{k-1} = R[(1 - v^n)/(1 - v)] = R\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (R/v)a_{\overline{n}|i}, \tag{51}$$

dove il simbolo $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ si legge "a anticipato figurato n al tasso i".

b) n finito, $t_1 = t_0 + m + 1$, con $m \geq 1$, (rendita temporanea, differita e posticipata)

$$x_0 = R \sum_{k=m+1}^{m+n} v^k = Rv^{m+1}[(1 - v^n)/(1 - v)] = Rv^m a_{\overline{n}|i} = R\,{}_{/m}a_{\overline{n}|i}, \tag{52}$$

dove il simbolo ${}_{/m}a_{\overline{n}|i}$ si legge "a figurato n al tasso i differito m".

c) n finito, $t_1 = t_0 + m$, con $m \geq 1$, (rendita temporanea, differita e anticipata)

$$x_0 = R \sum_{k=m}^{m+n} v^k = Rv^m[(1 - v^n)/(1 - v)] = Rv^m\ddot{a}_{\overline{n}|i} = R\,{}_{/m}\ddot{a}_{\overline{n}|i}, \tag{53}$$

dove il simbolo ${}_{/m}\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ si legge "a anticipato figurato n al tasso i differito m".

d) n illimitato, $t_1 = t_0$ (rendita perpetua, immediata e posticipata)

$$x_0 = R \sum_{k=1}^{\infty} v^k = R[1/(1 - v)] = Ra_{\overline{\infty}|i} = R/i, \tag{54}$$

e) n illimitato, $t_1 = t_0$ (rendita perpetua, immediata e anticipata)

$$x_0 = R \sum_{k=1}^{\infty} v^{k-1} = (R/v)[1/(1 - v)] = R\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = R/vi = R/d, \tag{55}$$

dove d è detto "tasso annuo (effettivo) di sconto" o tasso annuo di interesse anticipato,

f) n illimitato, $t_1 = t_0 + m + 1$, con $m \geq 1$, (rendita perpetua, differita e posticipata)

$$x_0 = R \sum_{k=m+1}^{\infty} v^k = Rv^m[1/(1 - v)] = Rv^m a_{\overline{\infty}|i} = Rv^m/i, \tag{56}$$

g) n illimitato, $t_1 = t_0 + m$, con $m \geq 1$, (rendita perpetua, differita e anticipata)

$$x_0 = R \sum_{k=m}^{\infty} v^k = Rv^{m-1}[1/(1 - v)] = Rv^{m-1}a_{\overline{\infty}|i} = Rv^m/d, \tag{57}$$

IL PIANO DI AMMORTAMENTO

Un piano di ammortamento è, in estrema sintesi una *tabella* in cui vengono evidenziate le proprietà relative all'equivalenza finanziaria tra l'importo x_0, che rappresenta la somma a debito (credito), e la rendita r, che rappresenta il modo in cui il debito viene rimborsato (il credito viene recuperato). Esso può essere utilizzato sia per analizzare la dinamica di un'operazione di rendita già stipulata che per costruire un'operazione di rendita *ad hoc* che risulti equa rispetto ad una legge di equivalenza intertemporale predeterminata.
La tabella, nella sua versione generale, è divisa in cinque co-

lonne in cui vengono riportati, rispettivamente, per $k = 0,1,\ldots,n$, i valori assunti da:
1) il tempo t_k, che nel seguito, per semplificare al massimo il discorso, poniamo uguale a k, in cui viene pagata (incassata) la rata k-esima;
2) l'importo r_k della rata k-esima, che nel seguito indichiamo con R_k;
3) la *quota capitale* C_k relativa alla rata k-esima, ossia la parte della rata k-esima che viene utilizzata per ridurre il debito (credito);
4) la *quota interesse* I_k relativa alla rata k-esima, ossia la parte della rata k-esima che viene utilizzata per retribuire gli interessi maturati nell'intervallo temporale $(k-1,k]$ sulla somma ancora a debito al tempo $k-1$;
5) il debito (credito) residuo D_k un istante dopo il pagamento (l'incasso) della della rata k-esima.
Esistono, in teoria, tanti piani di ammortamento quante sono le forme possibili di rendita.
Nella pratica, vengono più spesso utilizzati:
a) il piano d'ammortamento a rate costanti posticipate (francese);
b) il piano d'ammortamento a rate costanti anticipate (tedesco);
c) il piano d'ammortamento a quote capitale costanti;
d) il piano d'ammortamento a rimborso unico (americano).
Per mostrare le loro differenze, vengono di seguito esaminati tutti e quattro nel caso particolare in cui:
a) la somma da rimborsare è: $x_0 = 100$ euro;
b) il numero delle rate della rendita è: $n = 5$;
c) l'intervallo temporale costante che intercorre tra il pagamento di due rate successive è: $\Delta t = 1$;
d) la legge di equivalenza intertemporale è: la legge degli interessi composti;
e) il tasso d'interesse, valutato sulla durata temporale unitaria è: $i(t,t+1) = i = 0,04$ (o 4%).

A) <u>Il piano d'ammortamento a rate costanti posticipate (francese)</u>

Un modo semplice di procedere per stendere questo piano d'ammortamento è il seguente:
1) si calcola il valore costante della rata utilizzando la (50); (nel nostro caso si ha:

$R = x_0/a_{\overline{5|}0,04} = 100/4,45182233 = 22,46$ euro)

2) si calcola l'interesse maturato nell'intervallo $(0,1]$, ossia dal momento in cui è stato ricevuto il prestito di 100 euro al momento in cui viene pagata la prima rata di 22,46 euro; (nel nostro caso si ha:

$I_1 = x_0 i = 100x0,04 = 4$ euro)

3) si calcola la quota capitale sulla prima rata; (nel nostro caso si ha:

$C_1 = R - I_1 = 22,46 - 4 = 18,46$ euro)

4) si calcola il debito residuo al tempo 1 subito dopo il pagamento della prima rata;
(nel nostro caso si ha:

$D_1 = x_0 - C_1 = 100 - 18,46 = 81,54$ euro)

5) si calcola l'interesse maturato nell'intervallo (1,2] ..... e così via.
Lo sviluppo completo del piano d'ammortamento è mostrato nella tabella seguente.

K	R_K	C_K	I_K	D_K
0	0	0	0	100,00
1	22,46	18,46	4,00	81,54
2	22,46	19,20	3,26	62,34
3	22,46	19,97	2,49	42,37
4	22,46	20,77	1,69	21,60
5	22,46	21,60	0,86	0

Il formulario generale, per k = 1, 2, ..., n, è il seguente:

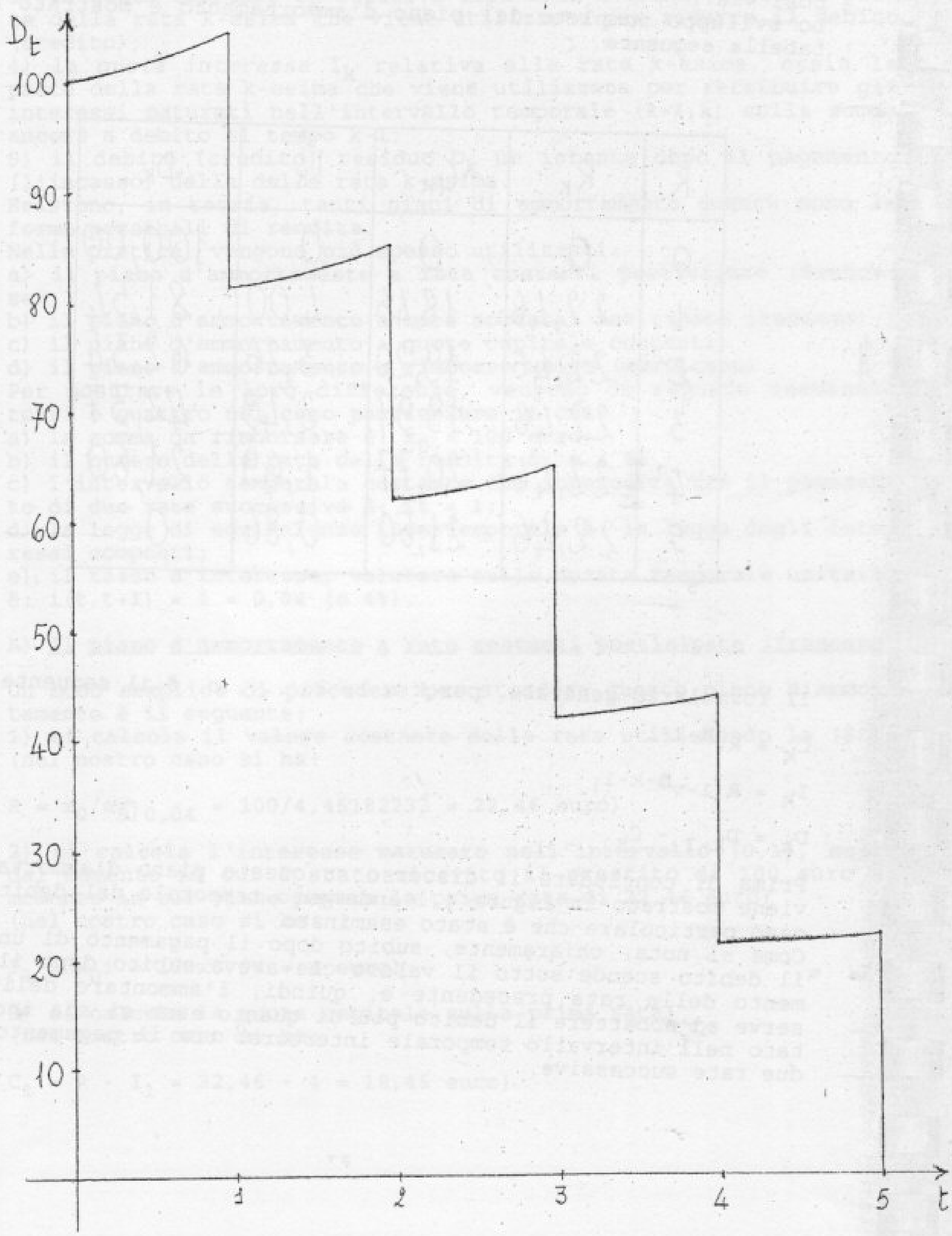
$C_k = Rv^{n-k-1}$

$I_k = R(1-v^{n-k-1})$

$D_k = D_{k-1} - C_k$.

Prima di concludere il discorso su questo piano d'ammortamento, viene mostrato in figura 4 l'andamento temporale del debito, nel caso particolare che è stato esaminato.
Come si nota, chiaramente, subito dopo il pagamento di una rata il debito scende sotto il valore che aveva subito dopo il pagamento della rata precedente e, quindi, l'ammontare della rata serve ad abbattere il debito più di quanto esso si sia incrementato nell'intervallo temporale intercorso tra il pagamento delle due rate successive.

figura 4



B) <u>Il piano d'ammortamento a rate costanti anticipate (tedesco)</u>

Questo piano d'ammortamento ha una struttura un poco più elaborata di quella del precedente. Seguendo, infatti, lo stesso procedimento utilizzato nel caso A), un piano d'ammortamento a n rate costanti anticipate di importo pari a R su un prestito di x_0 verrebbe a coincidere con il corrispondente piano d'ammortamento a n - 1 rate costanti posticipate su un prestito di x_0 - R.
In questo caso si procede nel modo seguente:
1) si calcola il valore costante della rata utilizzando la (51);
(nel nostro caso si ha:

$R = vx_0/a_{\overline{5}|0,04} = 0{,}96153846x100/4{,}45182233 = 21{,}60$ euro)

2) si calcola la quota interesse sulla prima rata di 21,60 euro
(nel nostro caso si ha:

$I_1 = x_0 iv = 100x0{,}04x0{,}96153846 = 3{,}85$ euro)

e la si riporta nella tabella alla riga corrispondente a k = 0, per evidenziare il fatto che la rata è anticipata;
3) si calcola il debito residuo al tempo 1 un istante prima del pagamento della seconda rata;
(nel nostro caso si ha:

$D_1 = (x_0 - R)(1 + i) = (100 - 21{,}60)x1{,}04 = 81{,}54$ euro)

4) si calcola la quota capitale sulla prima rata;
(nel nostro caso si ha:

$C_1 = x_0 - D_1 = 100 - 81{,}54 = 18{,}46$ euro)

5) si calcola la quota interesse relativa alla seconda rata .....
e così via.

K	R_K	C_K	I_K	D_K
0	0	0	3,85	100,00
1	21,60	18,46	3,14	81,54
2	21,60	19,20	2,40	62,34
3	21,60	19,97	1,63	42,37
4	21,60	20,77	0,83	21,60
5	21,60	21,60	0	0

Lo sviluppo completo del piano d'ammortamento è mostrato nella tabella precedente.
Il formulario generale, per k = 1, 2, ..., n, è il seguente:

$$C_k = Rv^{n-k-1}$$

$$I_{k-1} = R(1-v^{n-k-1})/v$$

$$D_k = (D_{k-1} - R)(1 + i).$$

Prima di concludere il discorso su questo piano d'ammortamento, risulta opportuno confrontarlo, brevemente, con il precedente. Come è immediato constatare, i valori C_k e D_k coincidono con i precedenti, mentre l'importo della rata risulta essere inferiore, in quanto essa è pagata anticipatamente, e, conseguentemente, risultano essere inferiori anche i valori I_k, in quanto valori scontati dei precedenti.

C) <u>Il piano d'ammortamento a quote capitale costanti</u>

Un modo semplice di procedere per stendere questo piano d'ammortamento, nel caso particolare in cui le rate sono posticipate, è il seguente:
1) si calcola il valore costante della quota capitale;
(nel nostro caso si ha:

$C_k = x_0/5 = 100/5 = 20$ euro, per k = 1, 2, ..., 5)

2) si calcola l'interesse maturato nell'intervallo (0,1], ossia dal momento in cui è stato ricevuto il prestito di 100 euro al momento in cui viene pagata la prima rata;
(nel nostro caso si ha:

$I_1 = x_0 i = 100x0,04 = 4$ euro)

3) si calcola l'ammontare della prima rata;
(nel nostro caso si ha:

$R = C_1 + I_1 = 20 + 4 = 24$ euro)

4) si calcola il debito residuo al tempo 1 subito dopo il pagamento della prima rata;
(nel nostro caso si ha:

$D_1 = x_0 - C_1 = 100 - 20 = 80$ euro)

5) si calcola l'interesse maturato nell'intervallo (1,2] ...... e così via.
Lo sviluppo completo del piano d'ammortamento è mostrato nella tabella seguente.
Il formulario generale, per k = 1, 2, ..., n, è il seguente:

$$C_k = x_0/n$$

$$I_k = D_{k-1}i$$

$D_k = D_{k-1} - C_k.$

K	R_K	C_K	I_K	D_K
0	0	0	0	100
1	24,00	20	4	80
2	23,20	20	3,20	60
3	22,40	20	2,40	40
4	21,60	20	1,60	20
5	20,80	20	0,80	0

D) Il piano d'ammortamento a rimborso unico (americano)

Questo piano d'ammortamento è semplicissimo in quanto le prime n - 1 rate sono composte dalla sola quota interesse e l'ultima è composta dalla quota interesse e da una quota capitale pari all'ammontare complessivo del debito. Poiché agli istanti 0, 1, .., n-1 il debito residuo è sempre lo stesso, tutte le quote interesse I_k sono uguali tra loro e pari a $x_0 i$ (nel nostro caso si ha:

$I_k = 100 \times 0{,}04 = 4$ euro, per k = 1, 2, ..., 5).

Lo sviluppo completo del piano d'ammortamento è mostrato nella tabella seguente.
Il formulario generale, per k = 1, 2, ..., n, è il seguente:

$$R_k = \begin{cases} I_k \\ I_k + x_0 \end{cases} \quad \text{per } k = \begin{cases} 1, 2, \ldots, n-1, \\ n \end{cases}$$

$$I_k = x_0 i$$

$$C_k = \begin{cases} 0 \\ x_0 \end{cases} \quad \text{per } k = \begin{cases} 1, 2, \ldots, n-1, \\ n \end{cases}$$

$$D_k = x_0 - C_k.$$

Prima di concludere il discorso su questo piano d'ammortamento, viene mostrato in figura 5 l'andamento temporale del debito, nel caso particolare che è stato esaminato.
Come si nota, chiaramente, subito dopo il pagamento di una delle

prime n-1 rate il debito torna al valore iniziale.

K	R_K	C_K	I_K	D_K
0	0	0	0	100
1	4	0	4	100
2	4	0	4	100
3	4	0	4	100
4	4	0	4	100
5	104	100	4	0

figura 5