

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO • 2012

Il candidato risolve uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

■ PROBLEMA 1

Siano f e g le funzioni definite, per tutti gli x reali da

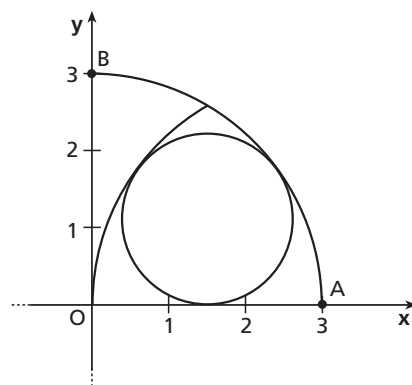
$$f(x) = |27x^3| \quad \text{e} \quad g(x) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right).$$

1. Qual è il periodo della funzione g ? Si studino f e g e se ne disentino i rispettivi grafici G_f e G_g in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy .
2. Si scrivano le equazioni delle rette r e s tangenti, rispettivamente, a G_f e G_g nel punto di ascissa $x = \frac{1}{3}$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da r e da s ?
3. Sia R la regione delimitata da G_f e da G_g . Si calcoli l'area di R .
4. La regione R , ruotando attorno all'asse x , genera il solido S e, ruotando intorno all'asse y , il solido T . Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T .

■ PROBLEMA 2

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy sono assegnati l'arco di circonferenza di centro O ed estremi $A(3; 0)$ e $B(0; 3)$ e l'arco L della parabola d'equazione $x^2 = 9 - 6y$ i cui estremi sono il punto A e il punto $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

1. Sia r la retta tangente in A a L . Si calcoli l'area di ciascuna delle due parti in cui r divide la regione R racchiusa tra L e l'arco AB .
2. La regione R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x , hanno, per ogni $0 \leq x \leq 3$, area $S(x) = e^{5-3x}$. Si determini il volume di W .
3. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R intorno all'asse x .
4. Si provi che l'arco L è il luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco AB e all'asse x . Infine, tra le circonferenze di cui L è il luogo dei centri, si determini quella che risulta tangente anche all'arco di circonferenza di centro A e raggio 3, come nella figura a lato.



▲ Figura 1.

QUESTIONARIO

1 Cosa rappresenta il limite seguente e qual è il suo valore?

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{5\left(\frac{1}{2} + b\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{b}.$$

2 Si illustri il significato di *asintoto* e si fornisca un esempio di funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

3 La posizione di una particella è data da $s(t) = 20\left(2e^{-\frac{t}{2}} + t - 2\right)$. Qual è la sua accelerazione al tempo $t = 4$?

4 Qual è la capacità massima, in litri, di un cono di apotema 1 metro?

5 Siano dati nello spazio n punti $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?

6 Sia $f(x) = 5 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x - \frac{5}{2} \sin 2x - \cos 2x - 17$. Si calcoli $f'(x)$.

7 È dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h . Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h .

8 Qual è il valore medio di $f(x) = \frac{1}{x}$ da $x = 1$ a $x = e$?

9 Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B , situati dalla stessa parte rispetto a una retta r , nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r . Si risolva il problema nel modo che si preferisce.

10 Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni x reale?

A $\cos(\sin(x^2 + 1))$

B $\sin(\cos(x^2 + 1))$

C $\sin(\ln(x^2 + 1))$

D $\cos(\ln(x^2 + 1))$

Si giustifichi la risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO • 2012

PROBLEMA 1

1. La funzione goniometrica $g(x) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$ ammette periodo P se risulta $g(x+P) = g(x)$, quindi:

$$\sin\left[\frac{3}{2}\pi(x+P)\right] = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \rightarrow \sin\left(\frac{3}{2}\pi x + \frac{3}{2}\pi P\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right).$$

Tenendo conto che il periodo della funzione seno è 2π , ne consegue che:

$$\frac{3}{2}\pi P = 2\pi \rightarrow P = \frac{4}{3}.$$

Studiamo la funzione $f(x) = |27x^3|$, scrivendola in questo modo:

$$f(x) = \begin{cases} 27x^3 & \text{se } x \geq 0 \\ -27x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Essa ha dominio \mathbb{R} ed è continua e derivabile in tutto il dominio; poiché $f(-x) = f(x)$, la funzione è pari, pertanto il suo grafico G_f è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate; interseca gli assi nel punto $O(0; 0)$; è non negativa nel proprio dominio.

Ricaviamo la derivata prima e il suo segno:

$$f'(x) = \begin{cases} 81x^2 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -81x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Risulta allora che $f'(x) > 0$ per $x > 0$, $f'(x) = 0$ per $x = 0$, $f'(x) < 0$ per $x < 0$: la funzione f ha pertanto minimo assoluto nel punto $x = 0$.

Studiamo la derivata seconda e il suo segno:

$$f''(x) = \begin{cases} 162x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -162x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

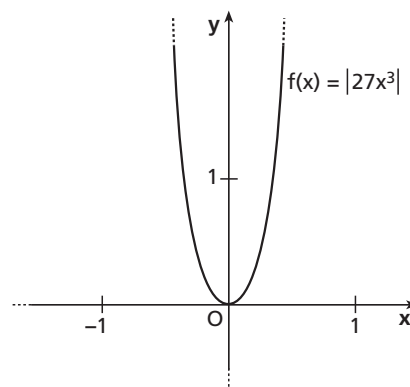
Ne segue che $f''(x) > 0$ per $x \neq 0$ e il corrispondente grafico ha nel dominio concavità rivolta verso l'alto.

Nella figura 2 è rappresentato il grafico G_f di $f(x)$.

Analizziamo ora la funzione goniometrica $g(x) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$ di periodo $\frac{4}{3}$. Si tratta di una contrazione orizzontale della funzione seno, del tipo $y = \sin\left(\frac{x}{m}\right)$, con $m = \frac{2}{3\pi}$.

Ricordando che la funzione seno, $y = \sin x$, si annulla nei punti $x = k\pi$, ha massimi assoluti nei punti $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ha minimi assoluti nei punti $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, si deduce che la funzione $g(x) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$, per $k \in \mathbb{Z}$:

- si annulla nei punti $x = \frac{2}{3}k$,
- ha massimi assoluti nei punti $x = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}k$,



▲ Figura 2.

- ha minimi assoluti nei punti $x = 1 + \frac{4}{3}k$.

Nella figura 3 è rappresentato il grafico di $y = \text{sen } x$ e della sua contrazione orizzontale

$$g(x) = \text{sen} \left(\frac{3}{2} \pi x \right).$$

2. Data una funzione generica $y = b(x)$, l'equazione della retta tangente al grafico di b nel punto $(x_0; y_0)$, quando la tangente esiste e non è parallela all'asse y , è:

$$y - y_0 = b'(x_0)(x - x_0).$$

Determiniamo l'equazione della retta r tangente alla funzione $f(x) = |27x^3|$ nel punto $x = \frac{1}{3}$, tenendo conto che $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ e $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 81\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 9$:

$$y - 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right) \rightarrow y = 9x - 2.$$

Tale retta ha coefficiente angolare $m_r = 9$.

Consideriamo la funzione $g(x) = \text{sen} \left(\frac{3}{2} \pi x \right)$: è noto dal punto 1 del problema che nel punto $x = \frac{1}{3}$ la funzione è dotata di massimo la cui ordinata vale 1; pertanto in tale punto la corrispondente tangente s è orizzontale, ha equazione $y = 1$ e coefficiente angolare $m_s = 0$.

Determiniamo la tangente goniometrica dell'angolo γ formato dalle rette r e s :

$$\text{tg } \gamma = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \rightarrow \text{tg } \gamma = 9.$$

Ricaviamo il corrispondente angolo in gradi sessagesimali:

$$\gamma = \text{arctg } 9 = 83,6598...^\circ \approx 83^\circ 40'.$$

3. Rappresentiamo in uno stesso piano cartesiano i grafici G_f e G_g ed evidenziamo la regione R delimitata dalle due curve (figura 4).

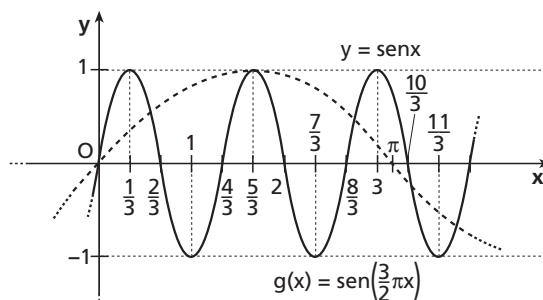
Ricaviamo l'ascissa del punto Q , intersezione dei grafici risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = |27x^3| \\ y = \text{sen} \left(\frac{3}{2} \pi x \right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = |27x^3| \\ |27x^3| = \text{sen} \left(\frac{3}{2} \pi x \right) \end{cases}$$

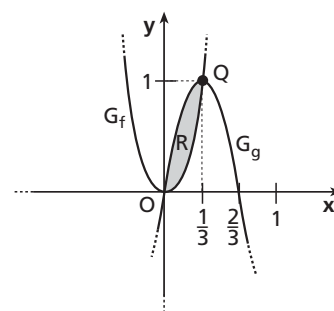
La seconda equazione del sistema non è risolvibile algebricamente ma dallo studio dei grafici sappiamo che la soluzione è unica per $x > 0$. Ugualmente è noto dal punto 2 del problema che il punto $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ è comune a entrambi i grafici. Per unicità si deduce che $x_Q = \frac{1}{3}$.

Calcoliamo l'area della regione R tramite il seguente integrale:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(R) &= \int_0^{\frac{1}{3}} \left[\text{sen} \left(\frac{3}{2} \pi x \right) - 27x^3 \right] dx = \left[-\frac{2}{3\pi} \cos \left(\frac{3}{2} \pi x \right) - \frac{27}{4} x^4 \right]_0^{\frac{1}{3}} = \\ &= -\frac{27}{4} \cdot \frac{1}{81} + \frac{2}{3\pi} = \frac{2}{3\pi} - \frac{1}{12}. \end{aligned}$$



▲ Figura 3.



▲ Figura 4.

4. Rappresentiamo in figura 5 il solido S generato dalla rotazione della regione R intorno all'asse x .

Osserviamo che il volume del solido S si ottiene dalla differenza tra due volumi:

- il volume V_g del solido generato dalla rotazione intorno all'asse x della parte di piano delimitata dalla funzione $g(x)$, dalla retta $x = \frac{1}{3}$ e dall'asse positivo delle ascisse;
- il volume V_f del solido generato dalla rotazione intorno all'asse x della parte di piano delimitata dalla funzione $f(x)$, dalla retta $x = \frac{1}{3}$ e dall'asse positivo delle ascisse.

Risulta allora:

$$\begin{aligned} V(S) &= V_g - V_f = \pi \int_0^{\frac{1}{3}} \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right) dx - \pi \int_0^{\frac{1}{3}} (27x^3)^2 dx = \\ &= \pi \int_0^{\frac{1}{3}} \left[\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 729x^6 \right] dx. \end{aligned}$$

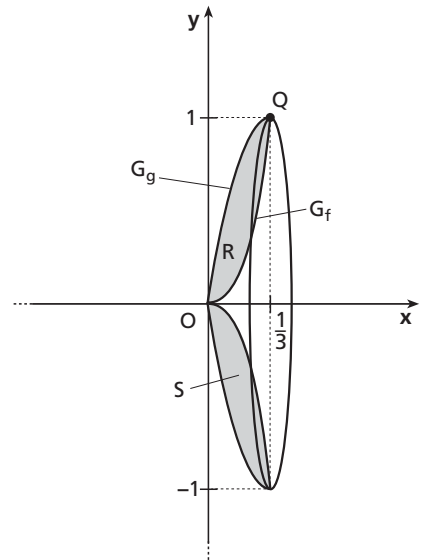
Rappresentiamo in figura 6 il solido T generato dalla rotazione della regione R intorno all'asse y .

Osserviamo che il volume del solido T si ottiene dalla differenza tra due volumi:

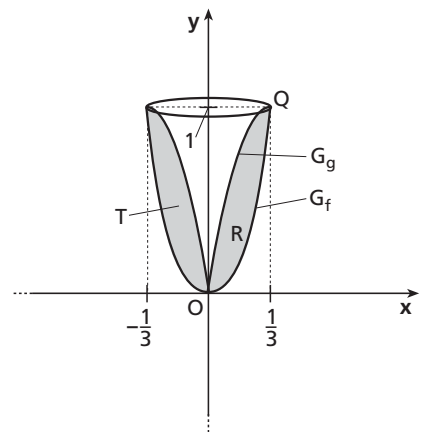
- il volume $V_{f^{-1}}$ del solido generato dalla rotazione intorno all'asse y della parte di piano delimitata dalla funzione $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{y}$, dalla retta $y = 1$ e dall'asse positivo delle ordinate;
- il volume $V_{g^{-1}}$ del solido generato dalla rotazione intorno all'asse y della parte di piano delimitata dalla funzione $g^{-1}(y) = \frac{2}{3\pi} \arcsen y$, dalla retta $y = 1$ e dall'asse positivo delle ordinate.

Risulta quindi:

$$V(T) = V_{f^{-1}} - V_{g^{-1}} = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{y}\right)^2 dy - \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{3\pi} \arcsen y\right)^2 dy = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{9}\sqrt[3]{y^2} - \frac{4}{9\pi^2} \arcsen^2 y\right) dy.$$



▲ Figura 5.



▲ Figura 6.

PROBLEMA 2

1. Consideriamo la parabola di equazione $x^2 = 9 - 6y$; la sua forma esplicita è $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}$, ha vertice $V(0; \frac{3}{2})$ e interseca il semiasse positivo delle ascisse nel punto $A(3; 0)$.

La retta r tangente alla parabola nel punto A per la formula dello sdoppiamento ha equazione:

$$\frac{y+0}{2} = -\frac{1}{6} \cdot 3x + \frac{3}{2} \rightarrow y = -x + 3.$$

Tale retta interseca l'asse y nel punto $B(0; 3)$.

Rappresentiamo in figura 7 l'arco di circonferenza di centro l'origine e di estremi A e B , l'arco L di parabola di estremi A e V , la retta tangente r .

La parte di piano R , delimitata dai due archi, viene suddivisa dalla retta r in due parti, R_1 e R_2 .

Calcoliamo l'area della regione R_1 come differenza tra l'area del triangolo AOB e l'area della regione OAV corrispondente alla metà dell'area del segmento parabolico. Vale quindi:

$$\mathcal{A}(R_1) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} \cdot \left(6 \cdot \frac{3}{2} \right) \right] = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

Troviamo l'area della regione R_2 come differenza tra l'area del settore circolare \widehat{AOB} e l'area del triangolo AOB . Risulta allora:

$$\mathcal{A}(R_2) = \frac{1}{4} \cdot (3^2\pi) - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{4}\pi - \frac{9}{2}.$$

2. Considerato il solido W , di base la regione R e le cui sezioni, perpendicolari all'asse x , hanno area $S(x) = e^{5-3x}$, per $0 \leq x \leq 3$, tale solido ha volume di valore:

$$V(W) = \int_0^3 S(x) dx = \int_0^3 e^{5-3x} dx = \left[-\frac{1}{3} e^{5-3x} \right]_0^3 = -\frac{1}{3} (e^{-4} - e^5) = \frac{e^9 - 1}{3e^4}.$$

3. Consideriamo il solido Q ottenuto dalla rotazione della regione R intorno all'asse x (figura 8).

Il relativo volume $V(Q)$ si ottiene come differenza tra il volume della semisfera di centro O e raggio OA e il volume ottenuto dalla rotazione dell'arco di parabola L intorno all'asse x :

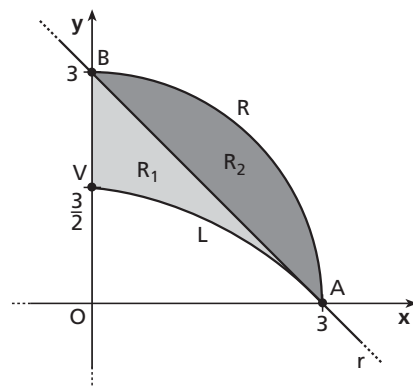
$$V(Q) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 \right) - \pi \int_0^3 \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2} \right)^2 dx =$$

$$= 18\pi - \frac{\pi}{36} \int_0^3 (-x^2 + 9)^2 dx =$$

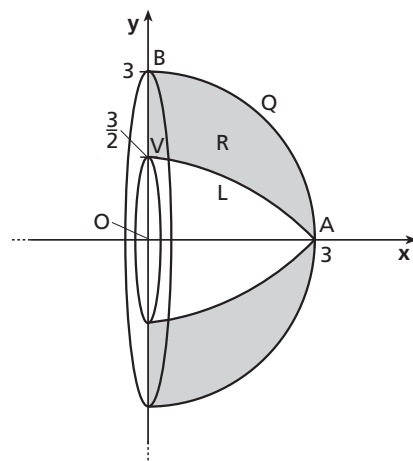
$$= 18\pi - \frac{\pi}{36} \int_0^3 (x^4 - 18x^2 + 81) dx =$$

$$= 18\pi - \frac{\pi}{36} \left[\frac{x^5}{5} - 6x^3 + 81x \right]_0^3 =$$

$$= 18\pi - \frac{\pi}{36} \left(\frac{243}{5} - 162 + 243 \right) = 18\pi - \frac{\pi}{36} \cdot \frac{648}{5} = 18\pi - \frac{18}{5} \pi = \frac{72}{5} \pi.$$



▲ Figura 7.



▲ Figura 8.

4. Consideriamo il settore circolare AOB e una generica circonferenza di centro $C(x; y)$, con $0 < x < 3$ e $0 < y < 3$, tangente internamente all'arco AB e all'asse x (figura 9).

Per la condizione di tangenza interna deve valere l'uguaglianza:

$$\overline{OC} + \overline{CT} = \overline{OA}.$$

Poiché $\overline{CT} = y$, allora vale

$$\overline{OC} + \overline{CT} = \overline{OA} \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + y = 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = 9 - 6y + y^2 \rightarrow x^2 = 9 - 6y \rightarrow y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}.$$

Pertanto il luogo dei centri corrisponde all'arco di parabola L di partenza.

Infine, consideriamo tale luogo, $C\left(x; -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}\right)$ e imponiamo che la circonferenza in esso centrata

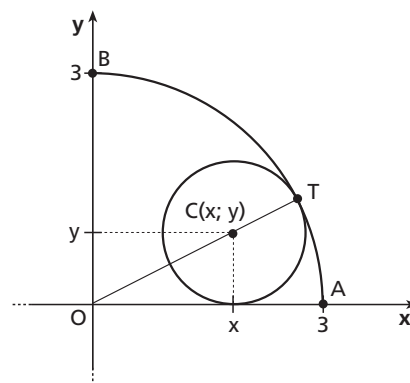
sia anche tangente alla circonferenza centrata in A e con raggio uguale a 3 (figura 10).

Si osserva che gli archi di circonferenza AB e OD sono simmetrici rispetto all'asse mediano $x = \frac{3}{2}$, così la circonferenza \mathcal{C}

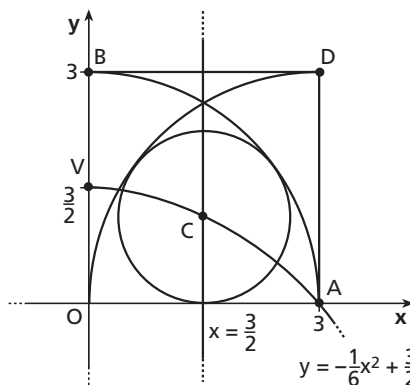
tangente a entrambi gli archi ha centro su tale asse. Pertanto

per $x = \frac{3}{2}$ risulta:

$$C\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\right) \rightarrow C\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{8}\right) \text{ con raggio } r = \frac{9}{8}.$$



▲ Figura 9.



▲ Figura 10.

QUESTIONARIO

- 1 Data la funzione polinomiale $f(x) = 5x^4$, il rapporto incrementale di tale funzione nel punto $x = \frac{1}{2}$ risulta:

$$\frac{f\left(\frac{1}{2} + b\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{b} = \frac{5\left(\frac{1}{2} + b\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{b}.$$

Per definizione, la derivata di una funzione in un punto è il limite per $b \rightarrow 0$ del rapporto incrementale di tale funzione in quel punto, pertanto il limite indicato nella consegna rappresenta la derivata della funzione f nel punto $x = \frac{1}{2}$:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{5\left(\frac{1}{2} + b\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{b} = f'\left(\frac{1}{2}\right).$$

Calcoliamo il valore del limite sfruttando tale uguaglianza e la regola di derivazione $f'(x) = 20x^3$:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}.$$

2 Una retta è detta *asintoto* del grafico di una funzione $f(x)$ se la distanza di un generico punto del grafico da tale retta tende a 0 quando l'ascissa o l'ordinata del punto tendono a ∞ .
In particolare, data una funzione $y=f(x)$ di dominio D , se si verifica che:

- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$, $c \in \mathbb{R}$ si dice che la retta $x=c$, è *asintoto verticale* del grafico della funzione;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = q$, $q \in \mathbb{R}$, si dice che la retta $y=q$ è *asintoto orizzontale* del grafico della funzione;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$, m e $q \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, si dice che la retta $y = mx + q$ è *asintoto obliquo* del grafico della funzione.

Consideriamo per esempio la funzione $y = \frac{4x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$.

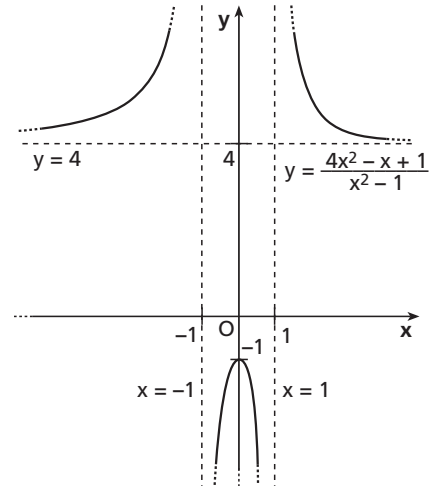
Il dominio è $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{4x^2 - x + 1}{x^2 - 1} = \pm \infty \rightarrow \text{il grafico ha asintoto verticale } x = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} \frac{4x^2 - x + 1}{x^2 - 1} = \mp \infty \rightarrow \text{il grafico ha asintoto verticale } x = -1;$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 - x + 1}{x^2 - 1} = 4 \rightarrow \text{il grafico ha asintoto orizzontale } y = 4.$$

In figura 11 è riportato il grafico della funzione $y = \frac{4x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$.



▲ **Figura 11.**

3 In Meccanica l'equazione oraria $s(t) = 20\left(2e^{-\frac{t}{2}} + t - 2\right)$ rappresenta un moto unidimensionale di un punto materiale. Per definizione di velocità istantanea $v(t)$ e di accelerazione istantanea $a(t)$ risulta:

$$v(t) = s'(t), \quad a(t) = v'(t) = s''(t).$$

Calcoliamo con le regole di derivazione tali derivate:

$$v(t) = s'(t) = 20\left(-e^{-\frac{t}{2}} + 1\right), \quad a(t) = v'(t) = 10e^{-\frac{t}{2}}.$$

Ricaviamo il valore dell'accelerazione nell'istante di tempo $t = 4$:

$$a(4) = 10e^{-\frac{4}{2}} = \frac{10}{e^2}.$$

4 Consideriamo un cono circolare retto (figura 12), sia x l'altezza, r il raggio del cerchio di base e $a = 1$ m l'apotema. Omettendo l'unità di misura, il raggio r e il volume V del cono risultano rispettivamente:

$$r = \sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow r = \sqrt{1 - x^2}, \text{ con } 0 < x < 1;$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 x = \frac{\pi}{3} (1 - x^2)x = \frac{\pi}{3} (x - x^3).$$

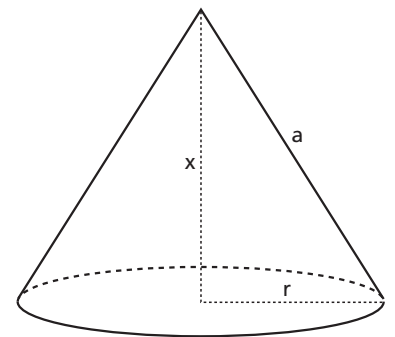
Consideriamo la funzione:

$$V(x) = \frac{\pi}{3} (x - x^3), \text{ con } 0 < x < 1,$$

e, per determinare il massimo, calcoliamo la sua derivata prima e studiamone il segno nell'intervallo dei limiti geometrici:

$$V'(x) = \frac{\pi}{3} (1 - 3x^2),$$

$$V'(x) = 0 \text{ per } x = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad V'(x) > 0 \text{ per } 0 < x < \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad V'(x) < 0 \text{ per } \frac{\sqrt{3}}{3} < x < 1.$$



▲ **Figura 12.**

Pertanto il volume del cono è massimo per $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e vale:

$$V_{\max} = V\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27}.$$

Esprimiamo nuovamente le unità di misura e approssimiamo il valore:

$$V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27} \text{ m}^3 \approx 0,403067 \text{ m}^3,$$

poiché $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$, risulta:

$$V_{\max} \approx 403,067 \text{ L}.$$

- 5** Un segmento è definito univocamente dai suoi due estremi, indipendentemente dal loro ordine; pertanto i segmenti che congiungono a due a due n punti sono le combinazioni di n estremi, raggruppati a due a due:

$$C_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Analogamente un triangolo è univocamente determinato dai suoi tre vertici, indipendentemente dal loro ordine; il numero di triangoli che si possono formare sono:

$$C_{n,3} = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Un tetraedro è univocamente determinato dai suoi quattro vertici, indipendentemente dal loro ordine; il numero di tetraedri che si possono formare sono:

$$C_{n,4} = \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

- 6** Data la funzione $f(x) = 5 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x - \frac{5}{2} \sin 2x - \cos 2x - 17$, applichiamo le formule di duplicazione, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ e $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, e riscriviamo la funzione:

$$f(x) = \frac{5}{2} \sin 2x + \cos 2x - \frac{5}{2} \sin 2x - \cos 2x - 17 \rightarrow f(x) = -17.$$

La funzione $f(x)$ è costante, pertanto la sua derivata è nulla:

$$f'(x) = D[-17] = 0.$$

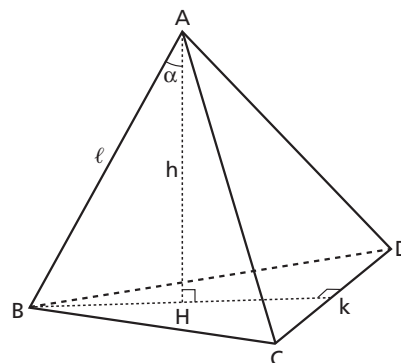
- 7** Consideriamo il tetraedro regolare di spigolo l e altezza h , sia α l'angolo formato da l e da h (figura 13).

Le facce del tetraedro sono triangoli equilateri di lato l e altezza $\frac{\sqrt{3}}{2}l$; l'altezza h cade nell'ortocentro H del triangolo BCD e divide in due parti il segmento BK , una doppia dell'altra. Risulta allora:

$$\overline{BH} = \frac{2}{3} \overline{BK} = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}l.$$

Consideriamo il triangolo rettangolo BHA e applichiamo uno dei teoremi trigonometrici dei triangoli rettangoli:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



▲ Figura 13.

Segue allora che l'ampiezza in gradi sessagesimali dell'angolo α vale:

$$\alpha = \arcsen \frac{\sqrt{3}}{3} = 35,264\dots^\circ \approx 35^\circ 16'.$$

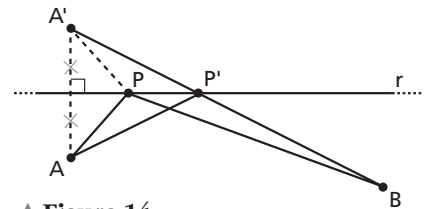
- 8** Data la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, essa è continua nell'intervallo $[1; e]$; pertanto vale il teorema della media ovvero esiste almeno un punto z appartenente all'intervallo tale che:

$$\int_1^e f(x) dx = f(z) \cdot (e - 1).$$

Si chiama $f(z)$ il valor medio della funzione nell'intervallo e ha valore:

$$f(z) = \frac{\int_1^e f(x) dx}{e - 1} = \frac{\int_1^e \frac{1}{x} dx}{e - 1} = \frac{[\ln|x|]_1^e}{e - 1} = \frac{1 - 0}{e - 1} = \frac{1}{e - 1}.$$

- 9** Consideriamo una retta r ; un punto generico P sulla retta e i punti A e B dalla stessa parte della retta. Rappresentiamo il punto A' simmetrico ad A rispetto alla retta r ; minimizzare il percorso $AP + PB$ equivale a minimizzare il percorso $A'P + PB$. Tracciamo il segmento $A'B$ che interseca la retta r nel punto P' (figura 14).



▲ Figura 14.

Dimostriamo che $A'P'B$ è il minimo percorso che congiunge A' con B .

Consideriamo il segmento $A'B$ (percorso $A'P' + P'B$); per disuguaglianza triangolare vale:

$$A'B < A'P + PB.$$

Pertanto il minimo percorso che congiunge A' con B è $A'P' + P'B$ e di conseguenza $AP' + P'B$ è il minimo percorso che congiunge A con B .

- 10** Consideriamo le varie alternative di funzioni composte.

- A) La funzione $f(x) = \cos(\sin(x^2 + 1))$ ha argomento del coseno compreso tra -1 e 1 ; poiché la funzione coseno è positiva nell'intervallo $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ e $]-1; 1[\subset]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, allora la funzione $f(x) = \cos(\sin(x^2 + 1))$ è sempre positiva in \mathbb{R} .
- B) La funzione $f(x) = \sin(\cos(x^2 + 1))$ ha argomento del seno compreso tra -1 e 1 ; poiché la funzione seno è positiva nell'intervallo $]0; 1[$ e negativa in $]-1; 0[$, allora la funzione $f(x) = \sin(\cos(x^2 + 1))$ non è sempre positiva in \mathbb{R} .
- C) La funzione $f(x) = \sin(\ln(x^2 + 1))$ ha argomento del seno che assume valori in $]0; +\infty[$; poiché la funzione seno in tale intervallo assume sia valori positivi che negativi, la funzione non è sempre positiva in \mathbb{R} .
- D) Ugualmente la funzione $f(x) = \cos(\ln(x^2 + 1))$ ha argomento del coseno che assume valori in $]0; +\infty[$; poiché la funzione coseno in tale intervallo assume sia valori positivi che negativi, la funzione non è sempre positiva in \mathbb{R} .

In conclusione la risposta esatta è la A.