2 Formule di addizione e di sottrazione

Formula di sottrazione del coseno

Vogliamo dimostrare che:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

Ricordiamo il significato di $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ come coordinate dell'estremo P dell'arco orientato $\overset{\frown}{AP} = \alpha$ della circonferenza goniometrica e consideriamo i punti P, Q, D, estremi degli archi α, β, $\alpha - \beta$, e l'origine A degli archi (fig. 2.4). Tali punti saranno così individuati:

$P(\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha)$
$Q(\cos\beta; \operatorname{sen}\beta)$
$D(\cos(\alpha-\beta); \operatorname{sen}(\alpha-\beta))$
$A(1; 0)$

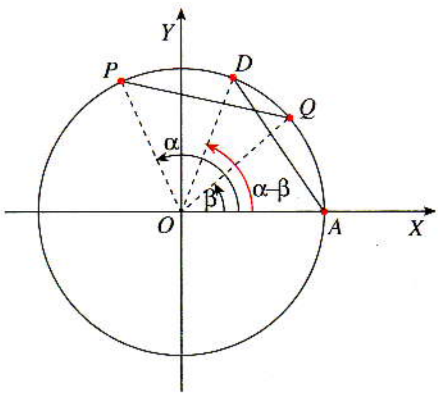

Figura 2.4

Le corde $\overline{PQ}$ e $\overline{DA}$ sono uguali, poiché sottendono archi che hanno la stessa lunghezza $\alpha - \beta$: dalla formula della distanza tra due punti di cui si conoscono le coordinate risulta:

$$\overline{PQ}^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2$$
$$\overline{DA}^2 = [\cos(\alpha-\beta) - 1]^2 + \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)$$

Sviluppati i calcoli, tenendo presente l'identità fondamentale $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, si ottiene:

$$\overline{PQ}^2 = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta)$$
$$\overline{DA}^2 = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$$

e quindi, poiché $\overline{PQ}^2 = \overline{DA}^2$:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \qquad [2.1]$$

Formula di addizione del coseno

La formula di sottrazione stabilita contiene evidentemente anche quella di addizione; infatti è:

$$\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$$

da cui si ricava:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta)$$

Ricordando che:

$$\cos(-\beta) = \cos\beta \qquad \operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta$$

ne deriva:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \qquad [2.2]$$

Formula di sottrazione del seno

Dalla formula di sottrazione del coseno si ricava quella del seno, tenendo presente che, per ogni arco x, si ha:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{sen} x \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$$

e quindi:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{sen}\beta$$

da cui, sostituendo $\operatorname{sen}\alpha$ a $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ e $\cos\alpha$ a $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, si ha:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad [2.3]$$

Formula di addizione del seno

La formula di sottrazione [2.3] contiene anche quella di addizione, infatti:

$$\alpha+\beta=\alpha-(-\beta)$$

quindi si avrà:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}[\alpha-(-\beta)]=\operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta)-\cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta)$$

da cui, ricordando che:

$$\cos(-\beta)=\cos\beta \qquad \operatorname{sen}(-\beta)=-\operatorname{sen}\beta$$

si ottiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad [2.4]$$