ESEMPI **Esempio 1**

Da un mazzo di 52 carte se ne estraggono 5. Calcoliamo la probabilità che fra le carte estratte ci siano:

a. quattro assi;
b. tre assi e due re;
c. tutte le carte siano di cuori.

a. Il numero di casi possibili è $n = C_{52;5}$ dal momento che non conta l'ordine. Poiché i 4 assi sono assegnati, possiamo scegliere solo la quinta carta fra le rimanenti 48. Il numero di modi in cui possiamo farlo è $m = C_{48;1} = 48$. Pertanto la probabilità di avere un poker d'assi servito è $p = \dfrac{C_{48;1}}{C_{52;5}} \approx 1{,}85 \cdot 10^{-5}$.

b. Ci sono $C_{4;3} = 4$ modi per scegliere i tre assi e $C_{4;2} = 6$ modi per scegliere i due re. Il numero di casi favorevoli è quindi $m = 24$ e la probabilità è $p = \dfrac{C_{4;3} \cdot C_{4;2}}{C_{52;5}} \approx 9{,}25 \cdot 10^{-6}$.

c. Il numero di casi favorevoli è $m = C_{13;5}$ poiché tutte le carte vanno scelte tra quelle di cuori. Pertanto la probabilità cercata è $p = \dfrac{C_{13;5}}{C_{52;5}} \approx 5 \cdot 10^{-4}$.

Esempio 2

Un'urna contiene 8 palline rosse e 7 nere, identiche a parte il colore che si ritiene non influisca sulla probabilità di estrazione della singola pallina. Estraiamo 3 palline dall'urna. Calcoliamo la probabilità che:

a. siano tutte e tre rosse;
b. siano due rosse e una nera;
c. almeno una sia nera.

a. Poiché l'ordine di estrazione non conta, il numero totale di terne di palline che si possono estrarre dall'urna è $n = C_{15;3} = 455$ (numero di elementi di Ω).

Per calcolare il numero di casi favorevoli, cioè il numero di terne di palline rosse, immaginiamo di estrarre le tre palline non più dalle 15 dell'urna, ma solo dalle 8 che sono rosse. Il numero di terne è $m = C_{8;3} = 56$.

La probabilità che tutte e tre le palline siano rosse è $p = \dfrac{56}{455} \approx 0{,}12 = 12\%$.

b. In questo caso una pallina va scelta tra le nere e ci sono $C_{7;1} = 7$ modi in cui farlo; le altre due vanno scelte tra le rosse e ci sono $C_{8;2} = 28$ modi in cui farlo.

Il numero di casi favorevoli, cioè il numero di terne che contengono due palline rosse e una nera, è $m = C_{7;1} \cdot C_{8;2} = 196$.

Pertanto la probabilità cercata è $p = \dfrac{196}{455} \approx 0{,}43 = 43\%$.

c. L'evento A: «almeno una pallina è nera» è il complementare di B: «le tre palline sono rosse», pertanto $p(A) = 1 - p(B) = 1 - \dfrac{56}{455} = \dfrac{399}{455} \approx 88\%$.

Esempio 3

Calcoliamo la probabilità di ottenere in un'estrazione del lotto

a. un terno secco;
b. una quaterna;
c. una cinquina.

a. Il numero di casi possibili è il numero di cinquine che si possono estrarre da 90 numeri.

Poiché l'ordine di estrazione non conta, questo numero è $n = C_{90;5}$.

Il numero di casi favorevoli è dato dal numero di cinquine che contengo 3 numeri prefissati, quelli stabiliti dal giocatore.

Queste cinquine si differenziano solo per i due numeri aggiuntivi, che vanno scelti non più tra 90, ma tra 87 numeri (3 sono già stati assegnati).

Il numero di casi favorevoli è quindi $m = C_{87;2}$.

La probabilità di fare terno secco in un'estrazione è $p = \dfrac{C_{87;2}}{C_{90;5}} \approx 8{,}5 \cdot 10^{-5}$.

b. Nel caso della quaterna, il numero di casi favorevoli è $m = C_{86;1} = 86$, poiché possiamo scegliere un solo elemento (fra gli 86 che non sono stati assegnati).

Pertanto $p = \dfrac{C_{86;1}}{C_{90;5}} \approx 1{,}96 \cdot 10^{-6}$.

c. Nel caso della cinquina è $m = 1$, poiché tutti i numeri devono coincidere, a meno dell'ordine. La probabilità è $p = \dfrac{1}{C_{90;5}} = 2{,}275 \cdot 10^{-8}$.