

1
ESERCIZICalcolo
combinatorio

1

Disposizioni semplici

ESERCIZIO GUIDA

In previsione dell'esame scritto di fisica, 25 studenti si precipitano in aula per occupare i 5 posti dell'ultima fila. Tenendo conto dell'ordine, in quanti modi possono essere occupati i posti dell'ultima fila?

1. La composizione dell'ultima fila dipende dalle persone che la occupano e dall'ordine con cui esse si siedono. Inoltre ogni persona si siede in un solo posto, non sono cioè possibili ripetizioni. Pertanto il calcolo va effettuato facendo uso delle disposizioni semplici $D_{n;k}$.
2. Il numero di persone tra cui scegliere è $n = \dots$
3. Il numero di elementi del gruppo è $k = \dots$
4. Applichiamo la formula e otteniamo $D_{\dots} = 25 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 6 = \dots$

1 In una gara con 6 concorrenti in quanti modi diversi può essere costituito il podio? [120]

2 Quanti numeri di non più di due cifre si possono ottenere con le cifre 1, 2, 3 senza ripeterle? [9]

3 Quante password di 5 caratteri, e senza ripetizioni, si possono formare con le prime 10 lettere minuscole dell'alfabeto inglese? [30 240]

4 Si deve formare una commissione con 1 insegnante di italiano, 1 di lingua straniera, 1 di matematica, 1 di storia. Gli insegnanti devono essere scelti tra 4 di italiano, 2 di lingua straniera, 3 di matematica e 2 di storia. In quanti modi può essere formata la commissione? [48]

5 Quanti numeri diversi di 3 cifre puoi ottenere lanciando un dado 3 volte? [216]

6 Un'urna contiene sei palline numerate dall'1 al 6. Componi un numero di tre cifre estraendo una dopo l'altra tre palline, senza rimetterle nell'urna. Quanti numeri diversi

puoi ottenere? Se la prima pallina estratta porta il numero 6, quanti numeri diversi di tre cifre che iniziano per 6 puoi ottenere? [120; 20]

7 Quanti numeri di tre cifre tutte differenti si possono formare con le cifre 2, 4, 6, 8? E con 0, 2, 4, 6, 8? [24; 48]

8 Un astuccio contiene 5 gettoni con le vocali. Estrae uno dopo l'altro 3 gettoni, quante sequenze si possono formare? [60]

9 Calcola il valore delle espressioni.

a. $(D_{4;3} - 3D_{3;2}) : 3$ [2]

b. $(5D_{2;1} + D_{5;3}) : 7$ [10]

10 Determina per tentativi il numero da sostituire a $x \in \mathbb{N}_0$ in modo che le seguenti uguaglianze siano vere.

a. $D_{3;x} = 6$ [2] b. $D_{5;x} = 60$ [3]

c. $D_{6;x} = 360$ [4] d. $D_{10;x} = 90$ [2]

11 Risolvi le seguenti equazioni nell'incognita $x \in \mathbb{N}_0$.

a. $D_{x;3} + D_{x;2} = 80$ [5]

b. $3D_{x;2} - D_{x;3} = 0$ [5]

c. $D_{x;2} + 3D_{x;3} + D_{x;4} = 0$ [0]

2

Permutazioni semplici

ESERCIZIO GUIDA

In quanti modi è possibile disporre in uno scaffale 7 libri differenti?

Le possibili situazioni differiscono solo per l'ordine in cui sono disposti i 7 libri.

Il numero cercato è quindi il numero di permutazioni di 7 oggetti, $P_n = 7! = 5040$.

12 Scrivi tutte le permutazioni degli elementi dell'insieme $X = \{A; B; C\}$.

13 Scrivi tutte le permutazioni degli elementi dell'insieme $Y = \{\text{verde; rosso; giallo}\}$.

14 In quanti modi diversi si possono disporre 15 studenti in un'aula con 15 banchi? [15!]

15 Quanti sono gli anagrammi, anche privi di significato, della parola ROSA che incominciano con R? [6]

16 In quanti modi diversi si possono allineare 7 persone in una fila allo sportello della posta? [7!]

17 In quanti modi si possono permutare le lettere della parola BELGIO? [720]

18 Quanti anagrammi, anche privi di significato, si possono ottenere con le lettere della parola TUO? [6]

19 In quanti modi si possono allineare i 7 giocatori di una squadra di calcio se il portiere è sempre al primo posto? [720]

20 Quanti anagrammi, anche privi di significato, si possono formare con le lettere della parola GELSOMINA? [9!]

21 Considera le lettere della parola AIUOLE. Quanti anagrammi, anche privi

di significato, si possono ottenere con le sue sei lettere? Quanti di questi anagrammi iniziano con una consonante? Quanti iniziano con una vocale? [6!; 5!; 600]

22 Quanti numeri con cifre diverse si possono formare con le cifre 2, 5, 6, 8? Quanti di questi sono dispari? [24; 6]

23 In quanti modi si possono disporre intorno a un tavolo rotondo 8 invitati a una festa? [7!]

24 In quanti modi diversi si possono disporre le 10 carte di fiori di un mazzo? [10!]

25 In quanti modi si possono mettere in fila 5 ragazzi se tra di loro ci sono 2 fratelli che vogliono stare sempre vicini? [48]

26 In quanti modi diversi si possono allineare i colori di un semaforo? [6]

27 In quanti modi diversi si possono disporre 6 camicie e 4 jeans in un armadio, mantenendoli separati? [17 280]

28 Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a. $\frac{3!}{5!}$ b. $\frac{10!}{8!}$ c. $\frac{3!}{5!} + \frac{1}{4!}$ d. $\frac{3!}{5!} - \frac{1}{4!}$
 e. $\frac{5!}{4!} \cdot \frac{1}{5}$ f. $\frac{5!}{2!} \cdot \frac{3!}{60}$ [$\frac{1}{20}$; 90; $\frac{11}{120}$; $\frac{1}{120}$; 1; 3!]

29 Risolvi in \mathbb{N} le seguenti equazioni.

a. $\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{2}$ [0] b. $\frac{(n+1)(n+3)n!}{n(n-1)!} = n(n+4)$ [0]
 c. $2n \cdot n! = n!(n-1)(n+2)$ [2] d. $(n+1)! - 3n! - 3(n-1)! = 0 \wedge n \geq 1$ [3]

3

Disposizioni con ripetizione

4

Permutazioni con ripetizione

ESERCIZIO GUIDA

Quanti numeri di 8 cifre si possono costruire con le cifre 2, 3, 4, 5, 5, 7, 7, 7?

Poiché la cifra 5 si ripete due volte e la 7 tre volte, si devono usare le permutazioni con ripetizione,

$$P'_8 = \frac{8!}{2! \cdot 3!} = 3360,$$

in cui si è diviso per 2! e 3! per tener conto del fatto che scambiando tra loro la coppia di 5 o permutando la terna di 7 non cambia il numero che viene generato.

30 Quanti anagrammi, anche privi di significato, si possono formare con le lettere della parola CORO? [12]

31 Quante password di 6 caratteri si possono formare con le cifre da 0 a 9? [1 000 000]

32 Quanti anagrammi, anche privi di significato, si possono formare con le lettere della parola MATEMATICA? [151 200]

33 Lanciando 3 volte un dado di 6 facce, quante terne di numeri si possono ottenere? [216]

34 Per fare un puzzle su un foglio di 12 quadretti si hanno a disposizione 3 quadretti colorati per ognuno dei 4 diversi colori. In quanti modi si possono dipingere i 12 quadretti del puzzle? $\left[\frac{12!}{3!3!3!3!} \right]$

35 Quante parole diverse, anche prive di significato, si possono formare con le lettere della parola METABOLISMO? Quante di queste iniziano con META? [9 979 200; 2520]

36 In quanti modi si possono porre 6 palline in 2 scatole, in modo che ce ne siano 4 nella prima e 2 nella seconda? [15]

5

Combinazioni semplici

ESERCIZIO GUIDA

Determina il numero di possibili cinque che si possono costruire estraendo 5 numeri tra i primi 90 numeri naturali.

Due cinque sono distinte solo se differiscono per almeno un numero. Pertanto l'ordine di estrazione è ininfluente e il numero di cinque va calcolato utilizzando le combinazioni semplici,

$$C_{90;5} = \binom{90}{5} = \frac{90!}{85! \cdot 5!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 43\,949\,268.$$

37 In quanti modi si può formare una commissione di 4 uomini e 3 donne, scelti tra 10 uomini e 5 donne? [2100]

38 In quanti modi possono essere scelti 4 studenti che parteciperanno a una partita tra i 25 studenti della 3^aC? [12 650]

39 In una prova di matematica agli studenti della 2^aA è stato proposto di ris-

spondere a 8 domande su 10. Quante scelte avevano gli studenti? Dopo mezz'ora dall'inizio, Giovanni aveva già risposto alle prime quattro domande. Quante erano a quel punto le sue possibili scelte? [45; 15]

40 Quante cinque si possono ottenere con i 90 numeri del lotto? [43 949 268]

41 Quante sono le cinque che contengono il terno 1, 2, 3? [3741]

42 Quante sono le cinquine che contengono i numeri 10 e 11? [109 736]

43 Un professore interroga i 20 alunni della 4^aA a due a due. Quante possibili coppie si possono formare? [190]

44 Quante terne differenti di interrogati si possono formare in una classe di 18 studenti? [816]

45 Sei amici decidono di fare una gita al mare, ma solo quattro di loro possono ottenere un passaggio in auto. In quanti modi si possono dividere in gruppi di quattro, o, il che è lo stesso, in gruppi di due? [15]

46 Cinque ragazzi stanno percorrendo un sentiero. A un bivio due decidono di andare a sinistra e tre a destra. In quanti modi diversi i cinque ragazzi si possono avviare lungo il sentiero a destra? [10]

47 Vogliamo colorare quattro fogli ciascuno con un colore diverso. Se abbiamo a disposizione sei colori, quante possibilità abbiamo di colorare i quattro fogli? [15]

48 Sapendo che una verifica contiene 10 esercizi e avendo a disposizione 18 esercizi, quante verifiche diverse, a meno dell'ordine, si possono costruire? [43 758]

49 Sei automobili arrivano contemporaneamente ai caselli di uscita dell'autostrada. Sono aperti sette caselli. In quanti modi si possono disporre le automobili? [7]

50 Se da un mazzo di 40 carte estraiamo tre carte, quante sono le possibili terne che il giocatore può avere? [9880]

51 Se giochiamo alla roulette (37 numeri dallo 0 al 36) quante terne che contengono il numero 0 possono uscire? [630]

52 Un'urna contiene sei palline numerate dall'1 al 6. Si estraggono contemporaneamente tre palline. In quanti modi diversi possono essere estratte? [20]

53 Per l'elezione dei due rappresentanti del consiglio di classe in 3^aB (25 studenti) si mettono nell'urna 25 biglietti sui quali sono scritti i nomi degli studenti. Se si estraggono due nomi a caso, quante coppie diverse si potrebbero ottenere? Se si estraggono quattro nomi a caso (per eleggere anche due supplenti), quante quaterne diverse si possono estrarre? [300; 12 650]

54 Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a. $\binom{3}{2}$ b. $\binom{3}{2}\binom{4}{3}$ c. $\binom{3}{2}\left[\binom{4}{2}+1\right]$
 [3; 12; 21]

55 Verifica le seguenti uguaglianze.

a. $\binom{3}{1} + 6\binom{3}{2} + 6\binom{3}{3} = 3^3$

b. $6\binom{4}{3} + 6\binom{5}{3} = 4 \cdot 3 \cdot 7$

c. $\binom{7}{4} + \binom{6}{4} + \binom{5}{4} + \binom{4}{4} = \binom{8}{5}$

6

Il binomio di Newton

56 Determina il primo termine dello sviluppo di $(a + 2b)^4$. [a^4]

57 Determina il terzo termine dello sviluppo di $(2a - b)^5$. [$80a^3b^2$]

58 Determina il quarto termine dello sviluppo di $(\frac{1}{2}x - 2)^6$. [$-20x^3$]

59 Sviluppa le seguenti potenze.

a. $(x - 1)^4$ b. $(2y + 3x)^5$

c. $\left(\frac{1}{3}x - 3y\right)^6$

Questionario

1 Scrivi la definizione di disposizioni semplici di n elementi di classe k e la formula che permette di determinare $D_{m;k}$.

Il numero delle disposizioni di 6 oggetti di classe k è 360. Quanto vale k ?

- a. 3 b. 4 c. 2 d. 5

2 Che cosa si intende per $n!$ (fattoriale di n)?

Quanti anagrammi, anche privi di significato, si possono formare con le lettere della parola LANCE?

- a. 60 b. 24 c. 120 d. 240

3 Scrivi la definizione di combinazioni semplici di n elementi di classe k .

Quante sono le combinazioni semplici di 7 elementi di classe 4?

- a. 144 b. 140 c. 35 d. 6

4 Data l'espressione $5D_{4;1} - C_{6;3}$, indica, tra quelli proposti, il suo risultato.

- a. 5 b. 0 c. -40 d. 40

5 Data l'espressione $\frac{3P_6 + D_{5;3}}{15C_{4;3}}$, indica, tra quelli proposti, il suo risultato.

- a. 40 b. 37 c. 25 d. 42

6 Indica l'insieme delle sue soluzioni dell'equazione $C_{n-2;2} + C_{n-2;1} = n - 1$.

- a. $n = 4$ b. $n = 2 \vee n = 4$
c. $n = 2$ d. $n = 1 \vee n = 4$

7 Che cosa si intende per coefficiente binomiale?

Il valore di $\binom{15}{n}$ è 455. Quanto vale n ?

- a. $n = 1$ b. $n = 3$
c. $n = 5$ d. $n = 7$

8 Qual è l'insieme delle soluzioni della seguente equazione?

$$\binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} = \binom{n+1}{n-1}$$

- a. \emptyset b. $\mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$
c. 5 d. 7

9 Quanto vale $\binom{12}{0}$?

- a. 20 b. $\cancel{2}$ c. 1 d. 0

10 Quante sono le cinquine che contengono un determinato terno?

- a. $C_{87;3}$ b. $C_{87;2}$
c. $D_{87;3}$ d. $D_{87;2}$

11 Quanti anagrammi, anche privi di significato, si possono formare con le lettere della parola GIOCATTOLO?

- a. $\frac{10!}{5!}$ b. $\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 3!}$
c. $\frac{8!}{3! \cdot 2!}$ d. $\frac{10!}{2! \cdot 3!}$

12 Quante quaterne si possono formare lanciando quattro volte una moneta?

- a. $D_{4;2}$ b. P_4
c. $D'_{2;4}$ d. $C_{4;2}$

13 Quante sono le parole di 4 lettere, anche non di senso compiuto, che si possono formare con le lettere A, B, C, O, R?

- a. $D_{5;4}$ b. $C_{5;4}$
c. P_4 d. $D'_{5;4}$

14 Se giochiamo a tombola (90 numeri da 1 a 90), quante terne che contengono il numero 1 possono uscire?

- a. 3916 b. 7832
c. 4005 d. 8010