

Calcolo delle probabilità (introduzione)

1) Si definisce probabilità di un evento **"semplice"** il rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di casi

possibili $P(E) = \frac{n \text{ casi favorevoli}}{n \text{ casi possibili}}$, in questo modo la probabilità è numero compreso tra 0 e 1 e può essere espressa in percentuale.

la DEFINIZIONE CLASSICA di Lagrange risale al 1812, ma non dice che i casi possibili devono avere ugual peso, ossia uguale probabilità... ma così la definizione cade in un circolo vizioso... allora sarebbe meglio utilizzare la DEFINIZIONE FREQUENTISTICA:

2) Si definisce probabilità di un evento **"semplice"** il valore cui tende il rapporto tra il numero di prove che hanno avuto esito favorevole ed il numero totale di prove effettuate. Ma non sempre è possibile effettuare un gran numero di prove, allora è meglio utilizzare una DEFINIZIONE SOGGETTIVA:

3) Si definisce probabilità di un evento il rapporto fra il prezzo P che un individuo ritiene giusto pagare e la somma S che ha diritto ad avere in cambio se l'evento si verifica: $P(E) = P / S$

Es.A) lancio di **una moneta** $P(\text{Testa}) = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$

Si definisce probabilità di un evento **"complesso"** a partire dalla probabilità degli eventi semplici che lo compongono (se questi sono indipendenti):

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Es.B) lancio di **due monete**: la probabilità che la prima moneta sia Testa è: $P(T) = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$

La probabilità che la seconda moneta sia Testa è: $P(T) = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$

La probabilità che entrambe siano testa è: $P(T \text{ e } T) = P(T) \cdot P(T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$

Es.C) lancio di 5 monete: la probabilità che tutte e 5 siano Testa è:

$$P(T \text{ e } T \text{ e } T \text{ e } T \text{ e } T) = P(T) \cdot P(T) \cdot P(T) \cdot P(T) \cdot P(T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} \cong 0,03125 \cong 3\%$$

Es.D) lancio di 5 monete: la probabilità che le prime 2 siano Testa e le ultime 3 siano Croce:

$$P(T \text{ e } T \text{ e } C \text{ e } C \text{ e } C) = P(T) \cdot P(T) \cdot P(C) \cdot P(C) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} \cong 0,03125 \cong 3\%$$

Es.E) lancio di 2 monete: la probabilità che una sia T e una C (non importa quale delle due monete sia Testa e quale Croce), è:

$$P(1T \text{ e } 1C) = \frac{n \text{ casi favorevoli}}{n \text{ casi possibili}} = \frac{\text{combin. classe } k=1 \text{ su } n=2 \text{ oggetti}(T,C)}{\text{disp. con rip. classe } k=2 \text{ (posiz.monete) su } n=2 \text{ oggetti}} = \frac{\binom{2}{1}}{2^2} = \frac{2}{4} = 0,5 = 50\%$$

Es.F) lancio di 5 monete: la probabilità che 1 sia T e 4 siano C (non importa quali siano Testa e quali Croce), è:

$$P(1T \text{ e } 4C) = \frac{\text{combin. classe } k=1 \text{ su } n=5 \text{ ogg.}}{\text{disp. con rip. classe } k=5 \text{ su } n=2 \text{ ogg.}} = \frac{\binom{5}{1}}{2^5} = \frac{5}{32} \cong 0,16 \cong 16\%$$

Es.G) lancio di 5 monete: la probabilità che 2 siano T e 3 siano C (non importa quali siano Testa e quali Croce), è:

$$P(2T \text{ e } 3C) = \frac{\text{comb. } k=2, n=5}{\text{disp. con rip. } k=5, n=2} = \frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{10}{32} \cong 0,31 \cong 31\%$$

N.B.: si osservi che la somma delle probabilità di tutti i casi possibili deve essere 1 (1=100%):

in tabella è riportato il caso del lancio di cinque monete.

N.B.: si osservino i coefficienti binomiali della riga 5 nel triangolo di tartaglia la cui somma è pari alla quinta potenza di due

$P(5T)$	$1/32 = 0,03$	$\binom{5}{0}$	=1
$P(4T \text{ e } 1C)$	$5/32 = 0,16$	$\binom{5}{1}$	=5
$P(3T \text{ e } 2C)$	$10/32 = 0,31$	$\binom{5}{2}$	=10
$P(2T \text{ e } 3C)$	$10/32 = 0,31$	$\binom{5}{3}$	=10
$P(1T \text{ e } 4C)$	$5/32 = 0,16$	$\binom{5}{4}$	=5
$P(5C)$	$1/32 = 0,03$	$\binom{5}{5}$	=1
Totale	$32/32 = 1$	2^5	=32