Problemi

Esercizi risolti

1 *Trovare due numeri sapendo che la loro somma è 72 e che uno di essi è $\frac{5}{3}$ dell'altro.*

Le fasi per risolvere un problema con i metodi dell'algebra possono così essere schematizzate.

1 **Scelta dell'incognita**	uno dei due numeri:	x;
altri dati	secondo numero:	$\frac{5}{3}x$;
	somma dei due numeri:	72.
2 **Modello algebrico**	equazione che traduce il problema:	$x + \frac{5}{3}x = 72$.
3 **Risoluzione dell'equazione**	$3x + 5x = 216 \Rightarrow x = \frac{216}{8} = 27$;	
	da cui: $\frac{5}{3}x = \frac{5}{3} \cdot 27 = 45$.	

I numeri cercati sono 27 e 45.

2 **Indovinello**

Un ragazzo dice a un amico:

a) *pensa un numero*; *b*) *moltiplicalo per* 3; *c*) *aggiungi* 18;
d) *dividi per* 3; *e*) *aggiungi* 14; *f*) *togli il numero pensato*.

Comunica poi all'amico che il risultato è 20. *Perché*?

Traduciamo il problema in equazione:

a) x; *b*) $3x$; *c*) $3x + 18$; *d*) $\frac{3x+18}{3}$; *e*) $\frac{3x+18}{3} + 14$; *f*) $\frac{3x+18}{3} + 14 - x$.

L'equazione: $\frac{3x+18}{3} + 14 - x = 20$, diventa: $\frac{3x + 18 + 42 - 3x}{3} = 20$,

da cui: $0 + 60 = 60$, che è un'*identità*.

3 *Trovare quale numero bisogna aggiungere al numeratore e al denominatore della frazione $\frac{3}{4}$ per ottenere una frazione equivalente a*: *a*) $\frac{16}{18}$, *b*) $\frac{10}{7}$.

Se indichiamo con x il numero da aggiungere, abbiamo che:

a) $\frac{3+x}{4+x} = \frac{16}{18} \Rightarrow 54 + 18x = 64 + 16x \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$.

b) $\frac{3+x}{4+x} = \frac{10}{7} \Rightarrow 21 + 7x = 40 + 10x \Rightarrow 3x = -19 \Rightarrow x = -\frac{19}{3}$.

4 *Trovare il numero che, diviso per a o diminuito di a, dia lo stesso risultato.*

Deve essere, con $a \neq 0$:

$$\frac{x}{a} = x - a \Rightarrow x = ax - a^2 \Rightarrow (a-1)x = a^2.$$

- Se $a \neq 1 \Rightarrow x = \dfrac{a^2}{a-1}$.
- Se $a = 1$, l'equazione è *impossibile*.

5 *Quale numero occorre sommare ai due termini della frazione $\frac{a}{b}$ (con $b \neq 0$) per ottenere il doppio di essa?*

Deve essere $x \neq -b$. Inoltre:

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{2a}{b} \Rightarrow ab + bx = 2ab + 2ax \Rightarrow (b-2a)x = ab.$$

Discussione

- Se $b \neq 2a$, l'equazione è *determinata* $\Rightarrow x = \dfrac{ab}{b-2a}$.

  Però x deve essere diverso da $-b$, cioè

$$\frac{ab}{b-2a} \neq -b \Rightarrow ab \neq 2ab - b^2 \Rightarrow ab \neq b^2 \begin{cases} b \neq 0 \\ b \neq a. \end{cases}$$

- Se $b = 2a$ oppure $b = a$, l'equazione, e quindi il problema, è *impossibile*.

6 *Un padre ha 42 anni e un suo figlio 16. Fra quanti anni l'età del padre sarà tripla di quella del figlio?*

Indichiamo con x il numero degli anni che devono trascorrere perché l'età del padre diventi tripla di quella del figlio. Il numero cercato x deve essere **intero** e **positivo**.

Premesso questo, si osservi che, fra x anni, l'età del padre sarà $42 + x$ e quella del figlio $16 + x$ e, se l'età del padre dovrà essere tripla di quella del figlio, sarà:

$$41 + x = 3(16 + x).$$

Ne segue:

$$42 + x = 48 + 3x, \quad \text{ossia:} \quad x = -3.$$

Poiché la soluzione trovata è negativa, non è una soluzione del problema proposto, che pertanto è impossibile, ovvero: *l'età del padre non potrà mai diventare tripla di quella del figlio*.

Osservazioni

- Da questo esempio si vede che un problema può essere impossibile anche quando l'equazione che lo traduce ha soluzione. Questo avviene quando la soluzione dell'equazione non si trova nell'insieme dei numeri assegnati dal problema.
- La soluzione dell'equazione considerata si può interpretare così: «*l'età del padre, tre anni fa, era tripla di quella del figlio*».

  Infatti, tre anni fa il padre aveva 39 anni e il figlio 13, e si vede appunto che 39 è il triplo di 13.

7

7 *Trovare la misura della base e dell'altezza di un rettangolo sapendo che la loro somma è, in m,* $17,5$ *e che l'altezza è i* $\frac{3}{4}$ *della base.*

Si procede come nel problema precedente ponendo: base $= x$ altezza $= \frac{3}{4}x$ con $x > 0$.

Il modello algebrico è dunque: $x + \frac{3}{4}x = 17,5$, da cui: $x = 10$ e $\frac{3}{4}x = 7,5$.

La base e l'altezza del rettangolo sono, rispettivamente, 10 m e 7,5 m.

8 *Calcolare la misura dei cateti di un triangolo rettangolo sapendo che uno è i* $\frac{5}{12}$ *dell'altro, e che l'ipotenusa è* m 52.

Indicando con x la misura, in metri, di un cateto, quella dell'altro cateto è $\frac{5}{12}x$ e, per il teorema di PITAGORA, si ha l'equazione: $x^2 + \left(\frac{5}{12}x\right)^2 = 52^2$, da cui: $x^2 + \frac{25}{144}x^2 = 2704$.

Moltiplicando ambo i membri di questa equazione per 144, si ottiene:

$$144x^2 + 25x^2 = 389376, \quad \text{ossia:} \quad 169x^2 = 389376, \quad \text{da cui:} \quad x^2 = \frac{389376}{169} = 2304.$$

Estraendo la radice quadrata, abbiamo: $x = \sqrt{2304} = 48$.

Ne segue che la misura di un cateto è m 48, e la misura dell'altro è m $\left(48 \cdot \frac{5}{12}\right) =$ m 20.