PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA - SEZIONE DI ROMA

SOLUZIONI DELLA GARA A SQUADRE

1. La risposta corretta è **(D)**. La cifra delle unità di una somma dipende solo dalle cifre delle unità degli addendi. Pertanto la successione delle ultime cifre dei numeri a_n inizia con i termini 1, 3, 4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3, 9, 2, 1, 3, dopodiché essa ricomincia e prosegue nello stesso modo, dato che ciascun termine dipende solo dai due precedenti. Prima della ripetizione abbiamo 12 elementi, dunque la successione è periodica di periodo 12. Poiché $1000 = 4 + 12 \cdot 83$, l'ultima cifra di a_{1000} coincide con l'ultima cifra di a_4 ed è pertanto 7.

2. La risposta corretta è **(C)**. Le parti della figura sono settori circolari o differenze di settori circolari. Ciascun settore circolare ha per area una certa frazione (che dipende solo dall'angolo) del cerchio di raggio n (con $n = 1, 2, 3, 4, 5$), ovvero ha area proporzionale a n^2 con un fattore di proporzionalità che è lo stesso per ciascuno dei settori considerati. Le aree dei settori circolari sono quindi proporzionali a 1, 4, 9, 16, 25. Per differenza, si ottiene che le cinque regioni in cui risulta divisa la figura hanno aree proporzionali a 1, 3, 5, 7 e 9. Le aree delle parti definite nel quesito sono allora, a meno di una comune costante di proporzionalità, 1, 3, 5, 7, 9 e tutte le possibili somme di un insieme consecutivo di questi cinque numeri. Si vede che si ripetono solo i valori 9 e 16 (abbiamo infatti $1 + 3 + 5 = 9$ e $1 + 3 + 5 + 7 = 7 + 9$).

3. La risposta corretta è **(A)**. I quadrati minori di 194 sono 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144 e 169. L'unica possibilità di ottenere 194 sommando tre di questi quadrati con una ripetizione è $25 + 25 + 144 = 5^2 + 5^2 + 12^2$. La terna di età corrispondente è $(5, 5, 12)$, dunque Marco ha due fratelli di 5 anni (i gemelli) e uno di 12 anni. Partendo dall'osservazione che una delle tre età deve essere maggiore o uguale a 9 (altrimenti la somma dei quadrati sarebbe minore o uguale a $64 + 64 + 64 = 192$), con qualche tentativo si trovano tutte le altre possibili terne: $(0, 5, 13)$, $(3, 4, 13)$, $(1, 7, 12)$, $(3, 8, 11)$ e $(7, 8, 9)$. L'unica altra terna che abbia la stessa somma di $(5, 5, 12)$ è $(3, 8, 11)$. Nel testo si precisa che Luca ha un fratello più piccolo e dunque i suoi fratelli hanno 3, 8 e 11 anni.

4. La risposta corretta è **(D)**. Si arriva alla risposta in vari modi, ad esempio con il seguente ragionamento. Osserviamo che la **(D)** esprime il fatto che i numeri z ed xy sono concordi (hanno lo stesso segno), cioè che il loro prodotto è positivo: in altre parole, la **(D)** si può scrivere $xyz > 0$. Anche la **(E)** si può scrivere in modo rapido, dicendo che x e z sono discordi, cioè che $xz < 0$. Si noti ora che **(A)** e **(D)** sono fra loro incompatibili (non possono essere entrambe vere): ne segue che l'affermazione sbagliata è una di queste due. Supponiamo che l'affermazione sbagliata sia **(A)** e che, quindi, le altre siano vere. Ne seguirebbe che $xyz > 0$; tenendo presente che $xz < 0$, abbiamo che y è negativo. Dalla **(C)** deduciamo che x è positivo e, pertanto, z è negativo. Ma questa situazione contraddice la **(B)**. Concludiamo che l'affermazione falsa è la **(D)**. Dalle osservazioni precedenti segue facilmente che y è positivo; quanto ad x e z, possiamo solo dire che sono discordi, ma non possiamo precisare qual è positivo e qual è negativo.

5. La risposta corretta è **(B)**. Galileo ha immediatamente fatto i seguenti calcoli. Essendo passati 30 secondi, cioè 1/2 minuto, la ruota ha compiuto una rotazione di $(1/2)/3 = 1/6$ di giro, ovvero di 60°. Nei successivi 30 secondi la ruota girerà di altri 60°, ovvero Isacco si troverà in un punto sulla stessa verticale di quello in cui ha lasciato il palloncino. La distanza tra i due punti è pari al raggio della giostra (in quanto lato dell'esagono regolare inscritto). D'altro canto, il palloncino sale ad una velocità di 3 km/h, ovvero 50 metri/minuto, quindi dopo 1/2 minuto salirà di 25 metri. Dunque Galileo ha rassicurato il piccolo Isacco perché sapeva che il raggio della ruota era proprio 25 metri, e quindi dopo 30 secondi avrebbero potuto recuperare il palloncino.

6. La risposta corretta è **(A)**. Poniamo $A = a + b + c$, $B = a^2 + b^2 + c^2$ e $C = a^3 + b^3 + c^3$. Si ha

$$A^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc,$$
$$AB = a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2.$$

Da queste si ricava $6abc = A^3 - 3AB + 2C$, e dunque

$$abc = \frac{A^3 - 3AB + 2C}{6}$$

Nel nostro caso $A = 2$, $B = 3$ e $C = 4$, quindi $abc = (8 - 18 + 8)/6 = -1/3$.

È opportuno osservare che tre numeri a, b e c che verificano le condizioni del problema effettivamente esistono. Si tratta delle tre soluzioni dell'equazione di terzo grado $6x^3 - 12x^2 + 3x + 2 = 0$. Approssimando al millesimo, queste sono

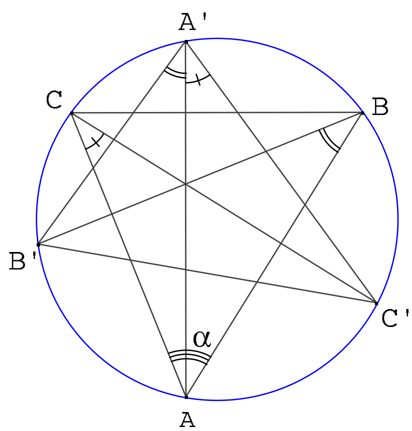
$$a = -0,287\ldots, \qquad b = 0,756\ldots, \qquad c = 1,531\ldots.$$

7. La risposta corretta è **(D)**. Indichiamo con c, b e s il numero di risposte corrette, in bianco e sbagliate, rispettivamente. Si ha $c + b + s = 16$ e il punteggio finale vale

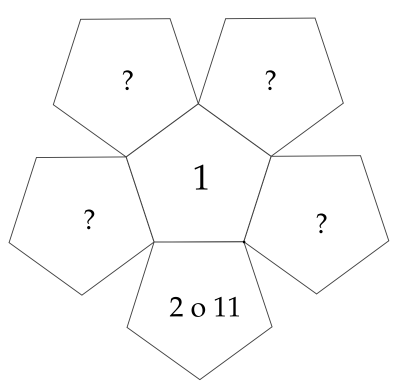
$$5c + b = 5(16 - b - s) + b = 80 - (4b + 5s)$$

Come si vede facilmente, il numero $4b + 5s$ (che corrisponde ai punti persi) può assumere tutti i valori da 0 fino a 80 tranne 1, 2, 3, 6, 7 e 11. Dunque, da 0 a 80 i soli punteggi non ottenibili sono 69, 73, 74, 77, 78 e 79. I punteggi realizzabili sono allora $81 - 6 = 75$.

8. La risposta corretta è **(D)**. Indichiamo con α, β e γ le ampiezze degli angoli interni del triangolo ABC con vertici, rispettivamente, nei punti A, B e C. Per il teorema sugli angoli alla circonferenza, valgono le seguenti uguaglianze: $C'\widehat{A}'A = C'\widehat{C}A = 90° - \alpha$ e $A\widehat{A}'B' = A\widehat{B}B' = 90° - \alpha$. Pertanto $C'\widehat{A}'B' = C'\widehat{A}'A + A\widehat{A}'B' = 180° - 2\alpha$. Analogamente, gli altri angoli di $A'B'C'$ misurano $180° - 2\beta$ e $180° - 2\gamma$. L'angolo più grande è dunque $180° - 2 \cdot 58° = 64°$.



9. La risposta corretta è **(E)**. Fissiamo la faccia con l'etichetta 1 e consideriamo le cinque facce ad essa adiacenti. Una di queste sarà etichettata con uno degli elementi della coppia $\{2, 11\}$. Le altre quattro facce dovranno contenere quattro elementi presi da tutte e quattro le coppie $\{3, 10\}$, $\{4, 9\}$, $\{5, 8\}$, $\{6, 7\}$. Le disposizioni (ordinate) di queste coppie sono $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, che condurranno tutte a configurazioni differenti. Occorre poi osservare che per ciascuna delle cinque facce adiacenti alla faccia 1, l'etichetta può essere scelta in due modi diversi (la minore oppure la maggiore della coppia), conducendo ogni volta a differenti configurazioni. Queste scelte sono sufficienti ad individuare la configurazione del dado, riguardando sei facce su dodici nessuna delle quali opposta all'altra. In tutto le possibilità sono quindi $2^5 \cdot 4! = 32 \cdot 24 = 768$.



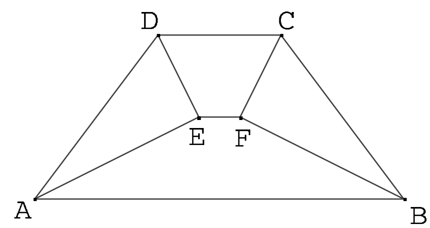
10. La risposta corretta è **(B)**. Calcoliamo la probabilità come rapporto tra numero di casi favorevoli N_f e numero di casi possibili N_p. Il numero di casi possibili è il numero di sottoinsiemi formati da 5 elementi in un insieme di 52 elementi. Questo è dato dal coefficiente binomiale

$$N_p = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5! \cdot (52-5)!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}.$$

Le scale reali di un dato seme sono 10 (basta pensare che la carta di maggior valore della scala può essere 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K o A). I semi sono quattro, quindi i casi favorevoli sono $N_f = 4 \cdot 10 = 40$. Allora la probabilità richiesta vale

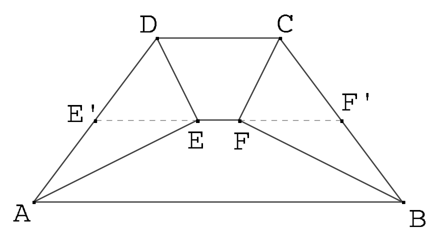
$$\frac{N_f}{N_p} = 4 \cdot 10 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{1}{26 \cdot 51 \cdot 49} = \frac{1}{64974}.$$

11. La risposta corretta è **(A)**. I punti equidistanti dai lati AB e AD sono quelli sulla bisettrice dell'angolo $B\widehat{A}D$, così come quelli equidistanti dai lati AD e DC sono sulla bisettrice dell'angolo $A\widehat{D}C$. I punti equidistanti da AB e CD sono quelli sulla retta parallela ad entrambi i lati che si trova a uguale distanza da essi. Queste tre rette si incontrano nel punto E, equidistante dai tre lati AB, AD e DC. Se indichiamo con F il punto equidistante dai tre lati AB, BC e CD, le quattro regioni colorate sono disposte come in figura



Osserviamo che $A\widehat{E}D$ è un angolo retto: infatti $B\widehat{A}D + A\widehat{D}C = 180°$, essendo i due angoli coniugati; considerando le bisettrici, si ha $E\widehat{A}D + A\widehat{D}E = 90°$; quindi $A\widehat{E}D$ è retto. Analogamente si vede che anche $B\widehat{F}C$ è retto. Per calcolare le aree richieste, intanto osserviamo che la distanza tra AB e CD, per il teorema di Pitagora, vale 8 (infatti $(18-6)/2 = 6$ e $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$). Perciò la distanza di E da AB, da AD e da DC è 4. L'area dei triangoli ADE e BCF è quindi

$$\frac{10 \cdot 4}{2} = 20.$$



Per determinare la misura del segmento EF, prolunghiamolo fino ad incontrare i lati obliqui AD e BC nei punti E' e F', rispettivamente. Notiamo che $\overline{E'F'} = (6+18)/2 = 12$, media aritmetica delle lunghezze delle due basi. I punti E' e F' sono i punti medi delle ipotenuse dei triangoli rettangoli ADE e BCF: dunque le mediane EE' e FF' sono la metà dell'ipotenusa di questi triangoli e hanno entrambe lunghezza 5. Dunque $\overline{EF} = \overline{E'F'} - 2 \cdot 5 = 2$. Le aree dei trapezi $ABFE$ e $EFCD$ misurano quindi rispettivamente

$$\frac{(18+2) \cdot 4}{2} = 40 \quad \text{e} \quad \frac{(6+2) \cdot 4}{2} = 16.$$

12. La risposta corretta è **(D)**. Le sei somme possibili possono essere raggruppate a coppie che hanno $a+b+c+d$ come somma. Delle tre coppie, almeno una dovrà contenere due delle quattro somme considerate, una delle quali sarà maggiore di 4, mentre l'altra sarà almeno maggiore di 1. La somma $a+b+c+d$ sarà quindi maggiore di 5.

Per escludere le altre si possono costruire controesempi: $a = 4,4$ / $b = 0,8$ / $c = 0,7$ / $d = 0,1$ esclude **(A)**, **(C)** ed **(E)**; $a = 12$ / $b = 0,6$ / $c = 0,5$ / $d = 0,1$ esclude **(B)**.

13. La risposta corretta è **(C)**. Osserviamo che, per ogni intero n, il numero $f(n)$ è pari e dunque

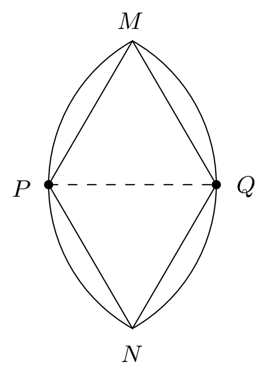
$$g(f(n)) = \begin{cases} n/2, & \text{se } n \text{ è pari,} \\ (n-1)/2, & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Per comodità poniamo $g(f(n)) = h(n)$. Il numero richiesto è

$$h^{20}(N) = \underbrace{h(h(\cdots h(h}_{20 \text{ volte}}(N))\cdots))$$

In notazione binaria N si scrive 100000000010000000001. Applicare h significa dividere per 2, limitandosi al quoziente intero e trascurando l'eventuale resto. Dunque, in notazione binaria, applicare h vuol dire semplicemente eliminare l'ultima cifra. Possiamo concludere che $h^{20}(N) = 1$. In realtà, per qualunque numero M, con $2^{20} \leqslant M < 2^{21}$, si ha $h^{20}(M) = 1$.

14. La risposta corretta è **(E)**. Siano P e Q i due pali. Quando le corde sono entrambe tese, la capra si trova nel vertice M di un triangolo equilatero di base $\overline{PQ} = 5$ (e di area $25\sqrt{3}/4$) o nel punto N, simmetrico di M rispetto alla retta PQ. La regione in cui la capra può muoversi è limitata da due archi di circonferenza: si tratta degli archi di centro P e Q, che uniscono M a N. Ciascuno di questi archi corrisponde ad un settore circolare di raggio 5 e angolo 120° (di area $25\pi/3$). Per determinare l'area richiesta dobbiamo sommare le aree dei due settori circolari e sottrarre le aree dei due triangoli equilateri.



15. La risposta corretta è **(B)**. La relazione si può riscrivere $b(a-1) = c(a+1)$. Se fosse $a = 2$ si avrebbe $b = 3c$, quindi b non sarebbe primo. Pertanto $a \neq 2$, cioè a è dispari. Possiamo anche scrivere $b/c = (a+1)/(a-1)$. I due termini della prima frazione sono primi, mentre nella seconda frazione numeratore e denominatore sono due numeri pari consecutivi. Quindi, la prima frazione si ottiene dalla seconda semplificando per 2. Ne segue che b e c sono due numeri primi che differiscono di 1 e l'unica possibilità è $(b,c) = (3,2)$. Sostituendo tali valori nella relazione si ottiene $3a - 3 = 2a + 2$, da cui si ricava $a = 5$. Quindi l'unica soluzione è $(a,b,c) = (5,3,2)$.

16. La risposta corretta è **(C)**. Il termine successivo della successione è

$$P_3(x) = P_2(x) + P_2(1)x^3 = 1 + x + 2x^2 + 4x^3.$$

Si vede facilmente (e si può dimostrare per induzione) che il generico polinomio è

$$P_n(x) = 1 + x + 2x^2 + 2^2x^3 + \cdots + 2^{n-1}x^n\,.$$

Dunque abbiamo

$$P_n(1/2) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{n \text{ volte}} = \frac{n}{2} + 1.$$

In particolare, abbiamo $P_{100}(1/2) = 51$.