PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA - SEZIONE DI ROMA

GARA A SQUADRE

Dipartimenti di Matematica delle Università Sapienza, Tor Vergata e Roma Tre

Con il sostegno di:
Unione Matematica Italiana, Istituto Nazionale di Alta Matematica,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

12 marzo 2009

1. La successione $a_1, a_2, a_3, \ldots$ è così definita: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ e ciascuno dei termini $a_3, a_4, \ldots$ è uguale alla somma dei due termini precedenti, cioè $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Dunque, per esempio,

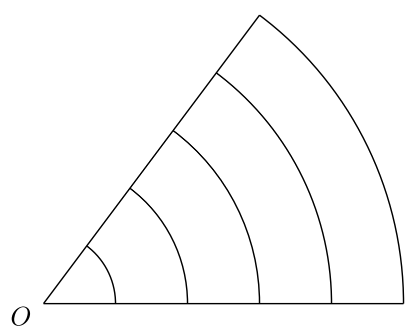
$$a_3 = 4, \quad a_4 = 7, \quad a_5 = 11, \quad a_6 = 18, \quad \ldots$$

Qual è l'ultima cifra di a_{1000}?

(A) 4
(B) 5
(C) 6
(D) 7
(E) 8

2. Si consideri la seguente figura, dove le curve sono archi di circonferenza di centro O e di raggio 1, 2, 3, 4 e 5. Chiamiamo *parte* una regione delimitata da uno o due degli archi di circonferenza in figura e da due segmenti di lunghezza intera. Quante coppie di *parti* con uguale area ci sono?

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4



3. Luca e Marco hanno ciascuno tre fratelli più piccoli. Parlando delle età dei loro fratelli si accorgono con sorpresa che la somma delle tre età è la stessa e che la somma dei quadrati delle tre età è per entrambi 194.

Sapendo che Marco ha due fratelli gemelli, quanti anni ha il fratello più piccolo di Luca?

(A) 3
(B) 4
(C) 5
(D) 6
(E) 7

4. Le seguenti affermazioni riguardano tre numeri fissati x, y e z, interi relativi diversi da 0. Sappiamo che esattamente una delle affermazioni è falsa. Di quale si tratta?

(A) $xyz < 0$
(B) se $x > 0$ allora $yz < 0$
(C) se $y < 0$ allora $x > 0$
(D) $z > 0$ se e solo se $xy > 0$
(E) $yz > 0$ se e solo se $xy < 0$

5. Domenica scorsa il saggio Galileo ha portato al luna park il piccolo Isacco. Giunti in prossimità delle giostre, il piccino ha chiesto di salire sulla ruota panoramica. Galileo, dopo essersi informato sull'altezza della ruota, dopo aver constatato che il giro completo durava 3 minuti e dopo essersi assicurato che i 2 euro che aveva in tasca erano proprio la somma necessaria a effettuare un unico giro, ha acconsentito. Purtroppo, dopo soli 30 secondi dall'inizio del giro panoramico, il piccolo Isacco ha inavvertitamente lasciato sfuggire il suo palloncino ed è scoppiato a piangere. Galileo, imperturbabile, avendo notato che non c'era un alito di vento e ben sapendo che un palloncino gonfiato ad elio sale ad una velocità costante di 3 km/h, ha rassicurato il piccolo: "Non preoccuparti, lo riprenderemo più in alto". Calcolare il raggio della ruota panoramica.

(A) 18 m
(B) 25 m
(C) 33 m
(D) 36 m
(E) 40 m

6. Dei tre numeri reali a, b e c si sa che

$$a + b + c = 2, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 3, \quad a^3 + b^3 + c^3 = 4.$$

Quanto vale il prodotto abc?

(A) $-1/3$
(B) $-1/4$
(C) $1/6$
(D) $2/5$
(E) $3/4$

7. Questo test a risposta multipla è formato da 16 domande. Ogni risposta esatta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti, ogni risposta in bianco vale 1 punto. Quanti sono i punteggi ottenibili nell'intera prova?

(A) 81
(B) 80
(C) 79
(D) 75
(E) 74

8. Un triangolo ABC ha angoli di ampiezze 58°, 59° e 63°. Detta Γ la circonferenza circoscritta ad ABC, siano, nell'ordine, A', B' e C' i punti d'intersezione (diversi da A, B e C) tra Γ e le altezze uscenti, rispettivamente, da A, B, C. L'angolo più grande del triangolo $A'B'C'$ misura

(A) 61°
(B) 62°
(C) 63°
(D) 64°
(E) 65°

9. Un *dado dodecaedrico* è un solido a forma di dodecaedro regolare (poliedro con dodici facce che sono tutti pentagoni regolari), sulle cui facce sono scritti i numeri da 1 a 12, in modo che la somma dei numeri su due facce opposte sia sempre 13.

In quante diverse maniere si possono disporre i numeri in un dado dodecaedrico?

(A) 512
(B) 576
(C) 720
(D) 750
(E) 768

10. Calcolare la probabilità di avere scala reale servita in una mano di poker a 52 carte. (Come è noto, scala reale vuol dire cinque carte consecutive dello stesso seme; l'asso può andare o prima del due o dopo il re, ma non contemporaneamente prima del due e dopo il re).

(A) 1/13
(B) 1/64974
(C) dipende dalla fortuna
(D) 5!/13!
(E) $0,2\%$

11. I lati di un trapezio isoscele misurano, nell'ordine, 10, 6, 10, 18 e sono rispettivamente di colore giallo, verde, rosso, blu. Per ognuno dei lati, coloriamo del suo stesso colore i punti P interni al trapezio che hanno da quel lato distanza minore rispetto alle distanze di P dagli altri tre lati. Quali sono le aree delle regioni colorate rispettivamente di giallo, verde, rosso, blu?

(A) 20, 16, 20, 40
(B) 24, 16, 24, 32
(C) 20, 14, 20, 42
(D) 18, 12, 18, 48
(E) 24, 12, 24, 36

12. Sono dati quattro numeri reali non negativi distinti a, b, c, d. Dei sei numeri che si ottengono sommandone due distinti (ad esempio $a+b$, $a+c$, $c+d$) è noto che esattamente tre di essi sono maggiori di 4, ed esattamente uno è compreso tra 1 e 2. Cosa si può dire di $a+b+c+d$?

(A) è sicuramente maggiore di 8
(B) è sicuramente minore di 12
(C) non può essere uguale a 6
(D) non può essere minore di 5
(E) è compreso tra 7 e 8

13. Si considerino le seguenti due funzioni definite sull'insieme dei numeri interi:

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \text{ è pari,} \\ n-1, & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases} \qquad g(n) = \begin{cases} n/2, & \text{se } n \text{ è pari,} \\ (3n+1)/2, & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

Partendo da $N = 2^{20} + 2^{10} + 1$, applichiamo in modo alternato le funzioni f e g, iniziando con f, e fermiamoci dopo 40 iterazioni (cioè dopo aver applicato f per 20 volte e g per 20 volte).

Il risultato finale è

(A) -1
(B) 0
(C) 1
(D) 2
(E) 2^{10}

14. Un contadino lega la sua capra con due corde lunghe ciascuna 5 m, fissate rispettivamente a due pali distanti tra loro 5 m. Qual è l'area (in metri quadri) della superficie in cui può muoversi la capra?

(A) $10\pi - 25\sqrt{3}/4$
(B) $50\pi/3$
(C) $25/4$
(D) $25\pi/4$
(E) $50\pi/3 - 25\sqrt{3}/2$

15. Determinare quante terne di numeri primi (a, b, c) soddisfano la relazione

$$ab - b = ac + c.$$

(Ricordiamo che il numero 1 *non* è primo.)

(A) nessuna
(B) 1
(C) 2
(D) 6
(E) infinite

16. Sia $P_n(x)$ la successione di polinomi definita da $P_0(x) = 1$ e dalla formula

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + P_{n-1}(1) \cdot x^n$$

(dati un polinomio $P(x)$ e un numero a, ricordiamo che $P(a)$ indica il valore del polinomio calcolato in a, ovvero il valore ottenuto sostituendo a al posto di x nel polinomio). Quindi, per esempio,

$$P_1(x) = 1 + x, \quad P_2(x) = P_1(x) + P_1(1) \cdot x^2 = 1 + x + 2x^2, \quad \ldots$$

Calcolare $P_{100}(1/2)$.

(A) 49
(B) 50
(C) 51
(D) 100
(E) 101